ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2006. október 25.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI ÉS KULTURÁLIS MINISZTÉRIUM

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II./B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1.		
$H = \{16; 25; 36; 49; 64; 81\}$	2 pont	*Egynél több hiba esetén nem adható pont. Egy hiba vagy hiány esetén 1 pont jár.*
Összesen:	**2 pont**	

2.		
A metszéspont: $\left(0; -\frac{2}{3}\right)$	2 pont	*Az x = 0; y = -2/3 alak megadása esetén is jár a 2 pont. Ha a válaszban nem szerepel mind a két koordináta, legfeljebb 1 pont adható.*
Összesen:	**2 pont**	

3.		
A lejátszandó mérkőzések száma: 30.	3 pont	*Ha rossz modellt használ, és ezért 15-öt vagy 60-at válaszol, vagy jó modellt alkalmaz, de az eseteket hibásan számolja össze, akkor 1 pontot kaphat.*
Összesen:	**3 pont**	

4.		
Például: –2; –1; 0; 1; 7 (megfelel mindkét középértéknek).	4 pont	*Ha az öt adat csak az egyik feltételnek felel meg, 2 pont; ha egy-egy feltételt két különböző számötössel elégít ki, akkor 3 pont adható.*
Összesen:	**4 pont**	

5.		
Az ívhossz: $\frac{3\pi}{2}$.	2 pont	*A válasz elfogadható közelítő érték (4,712) megadásával is, ha legalább egy tizedes pontossággal számol.*
Összesen:	**2 pont**	*Ha az ívhosszat a sugár függvényében adja meg, 1 pont adható.*

6.		
A keresett számok: 570; 750; 705.	2 pont	*Egynél több hiba esetén nem jár pont, egy hiba vagy hiány esetén 1 pont adható.*
Összesen:	**2 pont**	

7.		
A testátló hossza: $\sqrt{2a^2 + b^2}$.	3 pont	*Ha az átló hosszának négyzetét adja meg, 1 pontot kap.*
Összesen:	**3 pont**	

8.		
B esemény valószínűsége: $\frac{1}{2}$.	2 pont	*Elfogadható válasz az 50% is. A 2 pont nem bontható.*
Összesen:	**2 pont**	

9.		
$A \cap B$ halmaz számossága: 27.	2 pont	*Ha nem válaszol a helyes számadattal, de helyes halmazábrát készít, 1 pontot kap.*
Összesen:	**2 pont**	

10.		
Az átlóvektorok merőlegesek egymásra, ezért	1 pont	*Ennek a gondolatnak bármely formában való megjelenítéséért jár az 1 pont.*
a skalárszorzat értéke 0.	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	*Ha a keresett skalárszorzat értékét $12 \cdot 20 \cdot \cos\varphi$ alakban adja meg, és tovább nem jut, 1 pontot kaphat.*

11.		
B logikai értéke: HAMIS	1 pont	
C állítás: Ha egy négyszög téglalap, akkor két szemközti szöge derékszög.	1 pont	*A C állítást nem feltétlenül kell „ha..., akkor...” alakban megadni.*
C logikai értéke: IGAZ	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

12.		
$\binom{7}{3} =$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha csak a helyes végeredményt adja meg.*
=35-féleképpen választhat.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	*Ha az összeállításokban a sorrendet megkülönbözteti* ($7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$*-et válaszol), 1 pont adható.*

II/A

13. a)		
A helyes grafikon megrajzolása.	2 pont	*Ha az értelmezési tartományt nem veszi tekintetbe, 1 pont adható. Ha nem rajzolja meg a teljes parabolaívet, de helyesen utal rá, akkor jár a 2 pont.*
Összesen:	**2 pont**	

13. b)		
A minimum helye: $x = 1{,}5$	1 pont	
A minimum értéke: 0,75	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

13. c)		
Az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve: $x^2 - 3x + 3 = 1 - 4x + 4x^2$	2 pont	*A 2 pont nem bontható.*
Rendezve: $3x^2 - x - 2 = 0$	1 pont	
Ennek az egyenletnek gyökei: $x_1 = 1$, illetve $x_2 = -\frac{2}{3}$.	2 pont	
Az $x = 1$ nem megoldás.	1 pont	*Behelyettesítésből vagy az értékkészlet vizsgálatából is adódhat.*
Az $x = -\frac{2}{3}$ esetén mindkét oldal értéke $\frac{7}{3}$, ezért ez megfelelő valós gyök.	2 pont	*Az $x = -\frac{2}{3}$ esetén a behelyettesítés történhet közelítő érték használatával is, igazolható a gyök helyessége az értelmezési tartomány és az értékkészlet vizsgálatával is.*
Összesen:	**8 pont**	

14. a)

versenyző sorszáma	I.	II.	III.	összpontszám	százalékos teljesítmény
1.	28	16	40	84	56
2.	31	35	44	110	73
3.	32	28	56	116	77
4.	40	42	49	131	87
5.	35	48	52	135	90
6.	12	30	28	70	47
7.	29	32	45	106	71
8.	40	48	41	129	86

Az első oszlop helyes kitöltése	2 pont	*Ha kettőnél több hiba van az egyes oszlopokba beírt adatok között, a 2 pont helyett 0 pont jár. Egy vagy két hiba esetén 1 pont adható.*
A második oszlop helyes kitöltése	2 pont	
1. helyezett: 5. sorszámú versenyző; 2. helyezett: 4. sorszámú versenyző; 3. helyezett: 8. sorszámú versenyző.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

14. b)

Mivel a 8 dolgozat között 4 darab dolgozat eredménye volt 75% felett, a keresett valószínűség: $\frac{4}{8} = 0{,}5\ (50\%)$.	2 pont	*A helyes válasz puszta közlése 1 pont.*
Összesen:	**2 pont**	

14. c)

Az I. feladat pontszámainak mediánja: 31,5 (ami kerekítve 32),	1 pont	
a II. pontszámainak számtani közepe: 279/8 = 34,875 (ami kerekítve 35),	1 pont	
III. feladat a 60 pont 90%-a: 54 pont.	1 pont	
A megfelelő kerekítéseket elvégezve, összesítve $32 + 35 + 54 = 121$ pont,	1 pont	
ami a 4. helyezést jelenthette volna.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	*A kerekítések elmulasztása (vagy eltévesztése) miatt az 5 pontból 1 pontot vonjunk le.*

15. a)

Az alábbi táblázat tartalmazza a három parcellára vonatkozó adatokat:

	sorok száma	egy sorban lévő fák száma	összesen	
fenyő	x	y	$x \cdot y$	
tölgy	$x-4$	$y-5$	$(x-4)\cdot(y-5)$	$x \cdot y - 360$
platán	$x+3$	$y+2$	$(x+3)\cdot(y+2)$	$x \cdot y + 228$

A szöveg helyes értelmezése	3 pont*	*1) Az „összesen” oszlopban az egyik változat megadása elegendő. 2) A 3 pont a közölt táblázat sorainak vagy oszlopainak logikája mentén is bontható. 3) Az ismeretlenek értelmezését más áttekinthető módon megadva is jár az 1-1 pont.*
A tölgyek és platánok összes számát kétféle módon felírva kapjuk az alábbi egyenleteket: $(x-4)\cdot(y-5) = x \cdot y - 360$	1 pont*	
$(x+3)\cdot(y+2) = x \cdot y + 228$	1 pont*	
Rendezés után: $\left.\begin{array}{l} 5x+4y=380 \\ 2x+3y=222 \end{array}\right\}$	2 pont	
Innen $x = 36$ és $y = 50$.	2 pont	
A fenyők parcellájában 36 sor, és egy sorban 50 db fenyőfa van.	1 pont	
Összesen:	**10 pont**	

** Ha az egyenletek felírása előtt a vizsgázó nem rögzíti világosan a bevezetett ismeretlenek jelentését, a 3+1+1 = 5 pont helyett legfeljebb 4 pontot kapjon.*

15. b)

A platánok parcellájában 39 sor és soronként 52 fa van.	1 pont	
2028 platánfa van.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

II/B

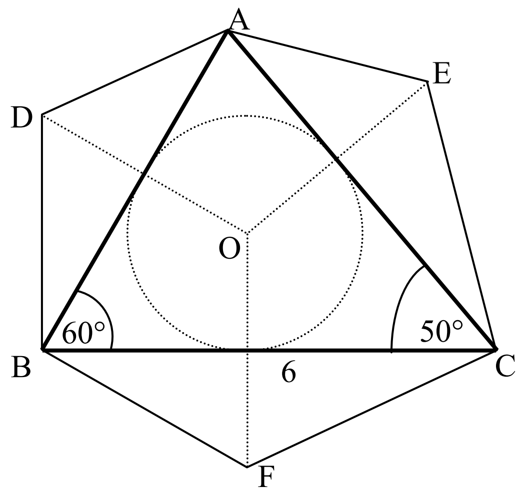
16. a)		
Számtani sorozatról van szó: $a_1 = 220$; $d = 10$. $A_{11} = a_1 + 10 \cdot d =$	2 pont	*Ha a gondolat a későbbi számítások során megjelenik, akkor ez a 2 pont jár.*
$= 220 + 10 \cdot 10 = 320$. 320 métert aszfaltoznak le a 11. munkanapon.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	*A válasz más helyes indoklással is elfogadható.*

16. b)		
$S_n \geq 7100$; $n = ?$, ahol n pozitív egész szám.	1 pont	*Ha ez a gondolat a későbbiek során megjelenik, akkor a pont jár.*
$S_n = \dfrac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n$ $7100 = \dfrac{2 \cdot 220 + (n-1) \cdot 10}{2} \cdot n$	2 pont	*S_n képletének puszta felírásáért nem jár pont.*
$1420 = (44 + n - 1) \cdot n$ $n^2 + 43n - 1420 = 0$	2 pont	
Egyetlen pozitív megoldás van ($n \approx 21{,}88$),	1 pont	
de az nem egész.	1 pont	
Az aszfaltozással a 22. munkanapon készülnek el.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	*Ha a mértékegység átváltása elmarad, maximum 5 pont adható.*

16. c)		
$S_{21} = \dfrac{2 \cdot 220 + (21-1) \cdot 10}{2} \cdot 21$	1 pont	
$S_{21} = 6720$	1 pont	
Az utolsó munkanapon 7100 – 6720 = 380 méter utat aszfaltoznak le.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

16. d)		
Egyenes arányosság esetén 440 métert kellene aszfaltozni a 21. napon.	1 pont	
$a_{21} = 220 + 20 \cdot 10 = 420$.	1 pont	
Nem teljesül az egyenes arányosság.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

17. a)



A háromszög harmadik szöge $BAC\angle = 70°$.	1 pont*	
A beírt kör O középpontja a belső szögfelezők metszéspontja.	1 pont*	
A tükrözésnél ezért az eredeti háromszög csúcsainál a belső szögek felének kétszerese adódik hozzá az eredeti szöghöz,	1 pont*	
vagyis a keletkezett hatszög szögei: $DAE\angle = 140°$; $ECF\angle = 100°$; $FBD\angle = 120°$.	1 pont	
Az ABC háromszög szögfelezői által (az O középpontnál) bezárt szögek a tükrözés miatt rendre megegyeznek a hatszög D, E és F csúcsú szögeivel:	1 pont*	
$BDA\angle = 115°$; $AEC\angle = 120°$; $CFB\angle = 125°$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

17. b)

A tükrözés miatt $BO = BD = BF$. Elegendő tehát az $x=BO$ belső szögfelező szakasz hosszát kiszámítani.	2 pont*	
A BOC háromszögben a szinusztétel alapján: $\frac{x}{6} = \frac{\sin 25°}{\sin 125°}$,	2 pont	
amiből $x \approx 3,1$ cm, a hatszög keresett két oldalának hossza egyaránt 3,1 cm.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

17. c)		
A tükrözés miatt a hatszög területe a háromszög területének kétszerese.	1 pont*	
A háromszög $AB = c$ oldalára: $\frac{c}{6} = \frac{\sin 50°}{\sin 70°}$,	1 pont	
amiből $c \approx 4{,}9$ (cm).	1 pont	
A háromszög területe: $\frac{6c\sin 60°}{2} \approx 12{,}7\ (cm^2)$.	2 pont	
A hatszög területe: $2 \cdot 12{,}7 = 25{,}4$ (cm^2)	1 pont	*Fogadjuk el a 25,5 cm^2 választ is (kerekítések sorrendje).*
Összesen:	**6 pont**	

1) A-gal jelölt pontok akkor is járnak, ha a megfelelő gondolatok egy rendezett ábrán jelennek meg, vagy a számítás menetéből derülnek ki.*
2) A hibás kerekítésekért összesen 1 pontot veszítsen a 17 pontból.

18. a)		
Behelyettesítve az $É$ képletébe a megadott $G = 1090$ értéket: $É_{2005} = 75{,}5 - 5 \cdot 10^{\frac{6000-1090}{6090}}$	2 pont	
$É_{2005} \approx 75{,}5 - 5 \cdot 10^{0{,}8062}$	1 pont	
Innen a 2005-ös várható élettartam 43,5 év.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	*A képlet helyes használata és a jó válasz esetén jár a 4 pont.*

18. b)		
$3 \cdot 1090 = 3270$ adja G új értékét.	1 pont	
Behelyettesítve az $É$ képletébe $É_{2020} = 75{,}5 - 5 \cdot 10^{\frac{6000-3270}{6090}} \approx 75{,}5 - 5 \cdot 10^{0{,}4483} \approx 61{,}5$.	3 pont	
Innen az élettartamok változása: $É_{2020} - É_{2005} = 61{,}5 - 43{,}5 = 18$ (év)	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

18. c)		
Behelyettesítve az $\acute{E}$ képletébe az $\acute{E}=68$ értéket: $\acute{E}_{2005}=68=75{,}5-5\cdot 10^{\frac{6000-G}{6090}}$	1 pont	
Rendezés után kapjuk, hogy $10^{\frac{6000-G}{6090}}=1{,}5$.	2 pont	
(Logaritmussal számolva:) $\frac{6000-G}{6090}=\lg 1{,}5\approx 0{,}17609$	3 pont	
Ebből rendezéssel kapjuk, hogy 2005-ben a GDP értéke $G=4928$ dollár volt.	2 pont	
Összesen:	**8 pont**	
A megoldás során alkalmazott következetes és helyes kerekítések esetén adható a maximális pontszám.		