

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2008. október 21.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

**OKTATÁSI ÉS KULTURÁLIS
MINISZTERIUM**

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység**, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II./B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető**. A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1.		
A keresett halmaz: $\{1; 2; 3; 4; 6; 8\}$.	2 pont	<i>Ha csak egyetlen hiba van, 1 pont. Ha az összes osztót felsorolja, 1 pontot kap.</i>
Összesen:	2 pont	

2.		
$(3^2 =)$ 9-szeresére nő a terület.	2 pont	
Összesen:	2 pont	

3.		
$A_1 = \{1; 10\}; A_2 = \{1; 100\}; A_3 = \{10; 100\}$.	2 pont	<i>1. Két jó részhalmaz megadása 1 pont. 2. Hibás jelölés esetén pontot ne vonjunk le!</i>
Összesen:	2 pont	

4.		
A keresett vektor: $\mathbf{r} = (12; -4)$.	2 pont	<i>Számolási hiba esetén a helyes gondolat megjelölése 1 pontot ér.</i>
Összesen:	2 pont	

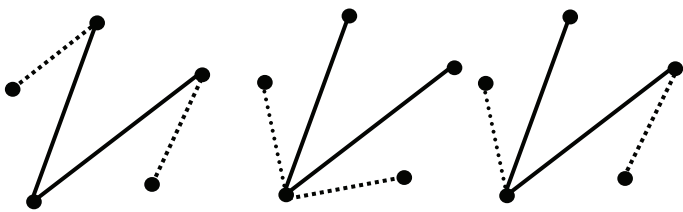
5.		
A hegyesszögek: 23° és 67° .	2 pont	<i>Hibás kerekítés esetén 1 pont jár. Helyes szögfüggvény felírása 1 pontot ér.</i>
Összesen:	2 pont	

6.		
Az év végi osztályzat medián esetén: 4	2 pont	
Összesen:	2 pont	<i>A pontok nem bonthatók.</i>

7.		
Az A állítás hamis.	1 pont	
A B állítás igaz.	1 pont	
A C állítás igaz.	1 pont	
A D állítás hamis.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

8.		
A kifejezés nem értelmezhető, ha $x = 90^\circ + n \cdot 180^\circ, n \in \mathbf{Z}$	3 pont	Ha tudja, hogy a nevező nem lehet 0, az 1 pontot ér. Ha megad egy jó x értéket, az 1 pont. Ha a mértékegység és a periódus is jó, 1 pont.
Összesen:	3 pont	

9.		
A 16 tanuló magasságának összege: $(16 \cdot 172 =)2752$ (cm).	2 pont	
Összesen:	2 pont	

10.		
Példák a helyes megoldásra:	2 pont	
		
Összesen:	2 pont	

11.																	
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th></th> <th>IGEN</th> <th>NEM</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$e(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$</td> <td></td> <td>X</td> </tr> <tr> <td>$e(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2})$</td> <td></td> <td>X</td> </tr> <tr> <td>$e(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2})$</td> <td>X</td> <td></td> </tr> <tr> <td>$e(\sin 30^\circ; -\cos 30^\circ)$</td> <td>X</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		IGEN	NEM	$e(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$		X	$e(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2})$		X	$e(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2})$	X		$e(\sin 30^\circ; -\cos 30^\circ)$	X		4 pont	Minden helyes válasz 1 pont.
	IGEN	NEM															
$e(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$		X															
$e(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2})$		X															
$e(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2})$	X																
$e(\sin 30^\circ; -\cos 30^\circ)$	X																
Összesen:	4 pont																

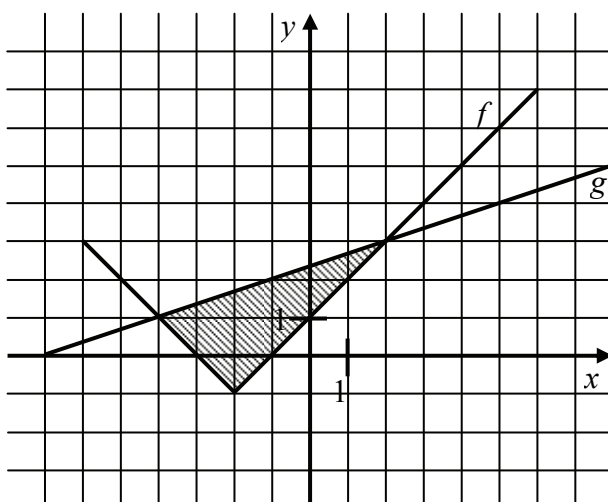
12.		
A jeles osztályzatok száma: 30.	1 pont	
A jó osztályzatok száma: 50.	1 pont	
A közepes osztályzatok száma: 40.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

II/A

13.		
$x = \frac{600}{y}$.	1 pont	
$xy + 5x - 10y = 650$.	2 pont	
$600 + \frac{3000}{y} - 10y = 650$. $3000 - 10y^2 = 50y$.	1 pont	<i>A jó behelyettesítés elvégzéséért jár az 1 pont.</i>
$y^2 + 5y - 300 = 0$.	2 pont	<i>Az egyszerűsítés elmaradása esetén is jár a 2 pont.</i>
$y_1 = 15$; $y_2 = -20$.	2 pont	
$x_1 = 40$; $x_2 = -30$.	2 pont	
A megoldások ellenőrzése.	2 pont	
Összesen:	12 pont	

14. a)		
Ha az $f_0 = x $ grafikonját előbb a $(-2; 0)$,	1 pont	<i>A 2 pont akkor is jár, ha egyetlen eltolással adja meg helyesen a transzformációt.</i>
majd a $(0; -1)$ vektorral eltoljuk, az f függvény grafikonját kapjuk.	1 pont	
[A grafikon két egymáshoz csatlakozó szakaszból áll. A csatlakozási pont: $(-2; -1)$, a szakaszok másik végpontja: $(-6; 3)$ és $(6; 7)$.] Helyes grafikon.	3 pont	<i>1. Ez a 3 pont akkor is jár, ha a helyes grafikon mellett nincs leírás. 2. Ha a megadottnál tágabb intervallumon helyesen ábrázol, 1 pontot veszítsen.</i>
Összesen:	5 pont	

14. b)



Az AB egyenes egyenlete: $x - 3y = -7$.	3 pont	<i>Helyes irányvektor $\vec{AB}(9; 3)$, (normálvektor, vagy meredekség) 1 pont, a jó egyenlet további 2 pont.</i>
Az egyik közös pont: $A(-4; 1)$.	2 pont	<i>Ábráról leolvasott jó válaszáért 1-1 pont jár. Ha behelyettesítéssel ellenőrzött is, a válasz teljes értékű.</i>
A másik közös pont: $C(2; 3)$.	2 pont	
Összesen:	7 pont	

15. a)

Csilla számláján a 8%-os évi kamat a nyitótőke évi 1,08-szoros növekedését jelenti.	1 pont	
A 18. születésnapon 18. alkalommal növekszik így a tőke,	1 pont	
ezért Csilla 18. születésnapjára a nyitótőke $S_{Csilla} = 500\,000 \cdot 1,08^{18} = 1\,998\,009,75$ -ra változna.	2 pont	<i>Ha az $1,08^{18}$ kerekített értékével számol, azt is fogadjuk el.</i>
Csilla a 18. születésnapján 1 998 010 forintot kaphatna.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

15. b)		
Csongor számláján a $p\%$ -os kamat évente $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$ -szeres évi növekedést eredményez	1 pont	
18 éven keresztül.	1 pont	
A 18. születésnapon Csongor betétjén összesen $S_{\text{Csongor}} = 400\,000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{36} = 2\,000\,000$ Ft van.	2 pont	
Innen $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{36} = 5$, vagyis $\left(1 + \frac{p}{100}\right) = \sqrt[36]{5} \approx 1,04572$.	2 pont	
A keresett kamatláb tehát 4,57%	1 pont	
Összesen:	7 pont	

- 1.) Ha a vizsgázó a megoldása során rosszul állapítja meg az eltelt évek számát, ezért a hibájáért csak egyszer vonjunk le 2 pontot, függetlenül attól, hogy hány alkalommal követte el ezt a hibát.
- 2.) A képlet nélküli megoldást (pl. végigszámolja évenként a betétek értékeit) fogadjuk el. Teljes pontszámot viszont csakis akkor adjunk, ha a kiszámított érték – helyes kerekítéssel – megegyezik a fenti eredményekkel.

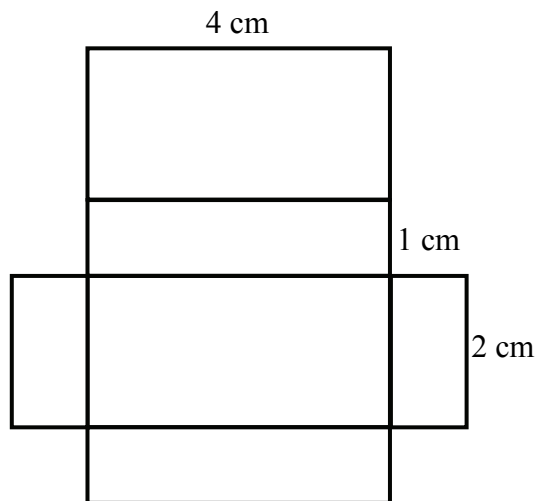
II/B

16. a)

Az elem	Az elem méretei (cm)	Az elem felszíne (cm ²)	4 pont
<i>alapelem</i>	8×4×2	112	
<i>A elem</i>	16×4×2	208	
<i>B elem</i>	8×8×2	192	
<i>C elem</i>	8×4×4	160	
Soronként a helyes felszín 1-1 pont			
Összesen:			4 pont

16. b)

Az alapelem éleinek hossza 1:2 arányú kicsinyítésben 4 cm, 2 cm és 1 cm.



A hálózat helyes alakja.	3 pont
A hálózat helyes méretezése.	1 pont
Összesen:	4 pont

16. c)		
Az alapelem térfogata 64 cm^3 . Az alapelemen kívül még három különböző méretű elem van a készletben, ezek mindegyikének a térfogata $2 \cdot 64 = 128 \text{ (cm}^3\text{)}$.	1 pont	
A négy különböző méretű elem térfogatának összege 448 cm^3 .	1 pont	
A teljes készlet térfogata tízszer ennyi, vagyis 4480 cm^3 .	1 pont	
Mivel a 16 cm élű doboz térfogata 4096 cm^3 , a játékkészlet nem fér el a dobozba.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

16. d) első megoldás		
A teljes készletben 40 elem van. A B és a C elem négyzetes oszlop. A négyzetes oszlopok száma a készletben 20 .	1 pont	
Annak valószínűsége, hogy az első kiválasztott elem négyzetes oszlop legyen $\frac{20}{40}$, hogy a második is az legyen: $\frac{20}{40} \cdot \frac{19}{39}$,	1 pont	
és így tovább. (Minden helyes kiválasztásnál eggyel csökken a négyzetes oszlopok és a készlet elemszáma is.) Hogy az ötödik is négyzetes oszlop legyen: $\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36} (\approx 0,02356)$.	2 pont	
Annak a valószínűsége, hogy mind az öt kiválasztott elem négyzetes oszlop legyen: $\approx 0,024$.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

16. d) második megoldás		
A teljes készletben 40 elem van. A B és a C elem négyzetes oszlop. A négyzetes oszlopok száma a készletben 20.	1 pont	
A 40 elem közül választunk egyenlő valószínűséggel ötelemű halmazokat úgy, hogy minden elemet a 20 elemű részhalmazból választjuk.	1 pont	
A keresett valószínűség: $\frac{\binom{20}{5}}{\binom{40}{5}}$.	1 pont	
Ennek értéke: $\frac{\binom{20}{5}}{\binom{40}{5}} = \frac{20!}{5! \cdot 15!} = \frac{20! \cdot 35!}{15! \cdot 40!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36}$	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy mind az öt kiválasztott elem négyzetes oszlop legyen: $\approx 0,024$.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

17. a)		
Az egyenlet bal oldalán szereplő szorzat értéke pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.	1 pont	<i>Ha a megoldásban megjelenik ez a gondolat, jár az 1 pont.</i>
Ha az első tényező 0, akkor $\log_2 x = 3$.	1 pont	
Innen $x_1 = 2^3 = 8$.	1 pont	
Ha a második tényező 0, akkor $\log_2 x^2 = -6$.	1 pont	
Innen $x^2 = 2^{-6} = \frac{1}{64}$,	1 pont	
ahonnan a pozitív tartományba csak az $x_2 = \frac{1}{8}$ esik.	1 pont	<i>Ha nem történik utalás arra, hogy csak a pozitív x értékek jöhetnek szóba, 2 pont helyett csak 1 pont adható.</i>
Mind a két gyök kielégíti az eredeti egyenletet.	1 pont	
Összesen:	7 pont	

17. b)		
$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ vagy $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.	2 pont	
$x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ vagy $x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2n\pi$.	2 pont	
$x - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$ vagy $x - \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} + 2n\pi$.	2 pont	
$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$; $x_2 = 2n\pi$; $x_3 = \pi + 2n\pi$; $x_4 = \frac{4\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.	4 pont	
Összesen:	10 pont	

18. a)		
A 25 parkolóhely közül 4 „szerencsés” van: a 7-es; a 17-es; a 14-es és a 21-es.	2 pont	
A keresett valószínűség: $\frac{4}{25}$ (= 0,16).	2 pont	
Összesen:	4 pont	

18. b)		
9 betöltendő hely marad.	1 pont	
A 2 piros autó $\binom{9}{2}$ -féleképpen állhat be, ezzel a zöld autók helye is eldőlt.	3 pont	
A lehetséges elhelyezkedések értéke 36.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

18. c)		
Nézzük a zöld színt választókat! 4-en zöld kocsit rendeltek, és ezen kívül 10-en zöldet vagy pirosat. Mivel 6 db piros kocsi van, a zöldet vagy pirosat választó 10 vevő közül legalább 4-nek zöld kocsit kellene adni.	4 pont	<i>Ez a 4-4 pont adható rövidebb, tömörebb indoklásért is. pl.: A zöld vagy piros színű kocsikra $4+10=14$ konkrét előjegyzést adtak le, de csak $7+6=13$ zöld vagy piros kocsi érkezett aznap.</i>
Zöld kocsiból viszont csak 7 db érkezik aznap, így a zöld kocsit választó vevők igényeit nem lehet kielégíteni, akárhogy is osztjuk a többi autót.	4 pont	
Összesen:	8 pont	