ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2011. október 18.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

NEMZETI ERŐFORRÁS MINISZTÉRIUM

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1.		
$420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \left(= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7\right)$.	2 pont	*A pontszám nem bontható.*
Összesen:	**2 pont**	

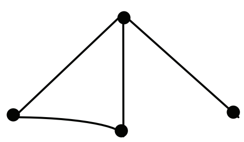
2.		
20 000 és 16 000.	2 pont	*Ha tudja, hogy a 36 000-et kilenc egyenlő részre kell osztani, akkor 1 pontot kap.*
Összesen:	**2 pont**	

3.		
A 8 nap alatt 4-szer kétszereződött meg a sejtek száma (s),	1 pont	*Ha helyesen felírja a sorozat első négy elemét, jár ez a 2 pont.*
$s = 5000 \cdot 2^4$.	1 pont	
$s = 80\ 000$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

4.		
a) **N**;	1 pont	*Bármilyen formában megadott helyes válasz esetén járnak a pontok.*
b) **Z**;	1 pont	
c) ∅.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

5.		
$a = 2$.	1 pont	
$b = –3$.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

6.		
A medián: 7.	2 pont	*A pontszám nem bontható.*
Összesen:	**2 pont**	

7.		
Helyesen megadott gráf pl. 	2 pont	*A pontszám nem bontható.*
Összesen:	**2 pont**	

8.		
$d = -3$	1 pont	
$a_{50} = a_1 + 49d$	1 pont	
$a_1 = 176$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

9.		
B)	2 pont	*A 2 pont nem bontható.*
Összesen:	**2 pont**	

10.		
B)	2 pont	*A 2 pont nem bontható.*
Összesen:	**2 pont**	

11.		
$2000 \cdot 1{,}06^x = 4\,024$.	1 pont	*Ha ez a gondolat a számolás során derül ki, akkor is jár ez a pont.*
x kiszámítása $\lg 2000 + x \lg 1{,}06 = \lg 4024$ $x = \dfrac{\lg 4024 - \lg 2000}{\lg 1{,}06} \approx 11{,}998$.	2 pont	*Ha zsebszámológéppel számolva, évről évre megadva az összeget kapja meg a 12 évet, az is teljes értékű megoldás.*
12 teljes év alatt.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

12.		
Az egy csúcsból kiinduló (bármelyik) két lapátló a végpontjaik által meghatározott harmadik lapátlóval kiegészítve szabályos háromszöget határoz meg,	2 pont	*A helyesen berajzolt lapátlóért 1 pont jár.*
a keresett szög ezért 60°-os.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

II. A

13. a)

A négyzetgyök értéke csak nemnegatív lehet: $x \le 5$,	1 pont*	
és csak nemnegatív számnak van négyzetgyöke: $\lvert x \rvert \ge \sqrt{35{,}5}$.	1 pont*	
Négyzetre emelve: $x^2 - 10x + 25 = 2x^2 - 71$.	1 pont	
Rendezve: $x^2 + 10x - 96 = 0$,	1 pont	
amelynek valós gyökei a –16 és a 6.	1 pont	
Az utóbbi nem felel meg az első feltételnek, ezért nem megoldása az egyenletnek Az egyenlet egyetlen megoldása a –16, hiszen ez mindkét feltételnek megfelel, s az adott feltételek mellett csak ekvivalens átalakításokat végeztünk.	1 pont*	*A *-gal jelölt pontokat akkor is megkapja, ha nem fogalmazza meg a feltételeket, de behelyettesítésekkel eldönti, hogy a másodfokú egyenlet két gyöke közül melyik megoldása az eredeti egyenletnek.*
Összesen:	**6 pont**	

13. b)

A bal oldalon a $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ helyettesítést elvégezve kapjuk: $1 - \cos^2 x = 1 + 2\cos x$.	1 pont	
$\cos^2 x + 2\cos x = 0$;	1 pont	
$\cos x(\cos x + 2) = 0$.	1 pont	
Ha $\cos x = 0$, akkor $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.	2 pont	*Ha a megoldást a felírt alakban adja meg, de nem szerepel az, hogy a k melyik halmaz eleme, vagy 2π-t ad meg periódusként, akkor 1 pontot kap. Ha $x = 90° + k \cdot 180°$ $(k \in \mathbf{Z})$ alakban adja meg a megoldást, vagy fok és radián vegyesen szerepel a megoldás felírásában, akkor erre a részre 1 pontot kap. Ha lehagyja a periódust (például a válasza $x = 90°$), akkor nem kap pontot.*
A $\cos x + 2 = 0$ egyenletnek nincs megoldása (mert $\cos x = -2$ nem lehetséges).	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	
Megjegyzés: Ha a másodfokú egyenlet megoldóképletével oldja meg az egyenletet, akkor is teljes pontszám járt.		

14. a)		
A legalább 40 éveseknek a 18,75%-a adta az idézett választ.	1 pont	*Ha ez a gondolat a számolás során derül ki, akkor is jár ez a pont.*
80-nak a 18,75%-a: $80 \cdot 0{,}1875$.	1 pont	
Tehát 15, legalább 40 éves ember adta az „5-nél kevesebbszer” választ.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

14. b)		
A 40 év alattiak közül $120 \cdot 0{,}35 = 42$,	1 pont	
a legalább 40 évesek közül $80 \cdot 0{,}375 = 30$,	1 pont	
azaz összesen 72 olyan ember van, aki évente 5−10 alkalommal jár színházba.	1 pont	
Ez a szám a megkérdezettek 36%-a.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

14. c) első megoldás		
Az összes lehetséges kiválasztás: $\binom{200}{2}$ (= 19 900).	1 pont	
Két 40 évnél fiatalabb van a kiválasztottak között: $\binom{120}{2}$ (= 7140) esetben.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy a két kiválasztott 40 évnél fiatalabb: $\frac{\binom{120}{2}}{\binom{200}{2}} \left(= \frac{7140}{19\,900} \approx 0{,}359\right)$.	1 pont	
A komplementer esemény valószínűsége: $1 - \frac{\binom{120}{2}}{\binom{200}{2}} \left(= \frac{12\,760}{19\,900}\right)$.	1 pont	
Tehát 0,641 annak a valószínűsége, hogy legfeljebb egy 40 évnél fiatalabb van a kiválasztottak között.	1 pont	*Ha nem három tizedesjegyre vagy hibásan kerekít, akkor ez a pont nem jár.*
Összesen:	**5 pont**	

14. c) második megoldás		
Az összes lehetséges kiválasztás: $\binom{200}{2}$ (= 19 900).	1 pont	
Ezek közül mindkét véletlenszerűen kiválasztott legalább 40 éves: $\binom{80}{2}$ (= 3160) esetben,	1 pont	
különböző korosztályú: $80\cdot 120$ (= 9600) esetben.	1 pont	
A kérdezett esemény valószínűsége: $\dfrac{\binom{80}{2}+80\cdot 120}{\binom{200}{2}}\left(=\dfrac{12\ 760}{19\ 900}\right)$.	1 pont	
Tehát 0,641 a valószínűsége annak, hogy legfeljebb egy 40 évnél fiatalabb van a kiválasztottak között.	1 pont	*Ha nem három tizedesjegyre vagy hibásan kerekít, akkor ez a pont nem jár.*
Összesen:	**5 pont**	

15. a) első megoldás		
(A két egyenes egyenletéből alkotott egyenletrendszer megoldása adja a *P* koordinátáit.) Az első egyenletből: $y=2{,}5x+7{,}25$.	1 pont	
Ezt behelyettesítve a második egyenletbe és rendezve: $x=-1{,}5$.	1 pont	
$y=3{,}5$.	1 pont	
Tehát *P*(–1,5; 3,5).	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

15. a) második megoldás		
(A két egyenes egyenletéből alkotott egyenletrendszer megoldása adja a *P* koordinátáit.) $10x-4y=-29$ $10x+25y=72{,}5$ $29y=101{,}5$	1 pont	
$y=3{,}5$	1 pont	
$x=-1{,}5$.	1 pont	
Tehát *P*(–1,5; 3,5).	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: A két egyenes helyes ábrázolása 1-1 pont. A jól ábrázolt egyenesek metszéspontja koordinátáinak (–1,5; 3,5) helyes leolvasása 1 pont, ezek ellenőrzése behelyettesítéssel 1 pont.

15. b) **első megoldás**		
Az egyenesek normálvektora $\mathbf{n}_e(5;-2)$ és	1 pont	
$\mathbf{n}_f(2;5)$.	1 pont	
A normálvektorok skaláris szorzata: $\mathbf{n}_e\cdot\mathbf{n}_f=5\cdot2+(-2)\cdot5=10-10=0$.	1 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha a vizsgázó arra hivatkozik, hogy a két normálvektor egymás 90°-os elforgatottja.*
Tehát a két egyenes merőleges.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

15. b) **második megoldás**		
Az egyenesek meredeksége: $m_e=\frac{5}{2}$,	1 pont	
$m_f=-\frac{2}{5}$.	1 pont	
A meredekségek szorzata -1,	1 pont	
tehát a két egyenes merőleges.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

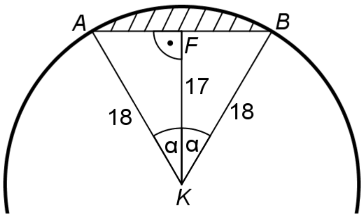
15. c)		
Az *e* egyenes meredeksége 2,5, tehát az egyenes *x* tengellyel bezárt α szögére igaz, hogy $\mathrm{tg}\,\alpha=2{,}5$.	3 pont	
Ebből $\alpha\approx68{,}2°$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

II. B

16. a)		
$M=-4{,}42+\frac{2}{3}\lg\left(1{,}344\cdot 10^{14}\right)$	1 pont	
$M\approx 5$	2 pont	*4,9 és 5 között bármely érték elfogadható.*
Összesen:	**3 pont**	

16. b)		
$9{,}3=-4{,}42+\frac{2}{3}\lg E$.	1 pont	
$\lg E = 20{,}58$.	1 pont	
Tehát a felszabadult energia körülbelül $E\approx 3{,}8\cdot 10^{20}$ (J).	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

16. c)		
A chilei rengés erőssége 2-vel nagyobb volt, mint a kanadai: $-4{,}42+\frac{2}{3}\cdot\lg E_C=-4{,}42+\frac{2}{3}\cdot\lg E_K+2$.	1 pont	
Rendezve: $\lg E_C-\lg E_K=3$.	1 pont	
(A logaritmus azonosságát alkalmazva) $\lg\frac{E_C}{E_K}=3$.	1 pont	
Ebből $\frac{E_C}{E_K}=1000$.	1 pont	
1000-szer akkora volt a felszabadult energia.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

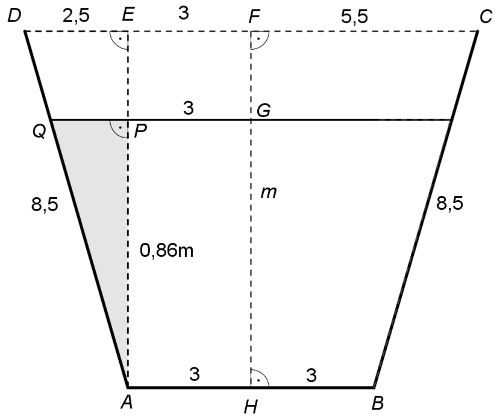
16. d)		
Az ábra jelöléseit használjuk.  Az *AKF* derékszögű háromszögből: $\cos\alpha = \frac{17}{18}$,	1 pont	
$\alpha \approx 19{,}2°$. $(2\alpha \approx 38{,}4°.)$	1 pont	*Elfogadható az $\alpha \approx 19°$ is.*
$T_{AKB\Delta} \approx \frac{18^2 \cdot \sin 38{,}4°}{2}$ $(\approx 100{,}6\ \text{km}^2)$.	1 pont	*Ha a függvénytáblázatban található, a körszelet területére vonatkozó képletet hibásan alkalmazza, akkor legfeljebb 1 pontot kaphat.*
$T_{\text{körcikk}} \approx 18^2 \pi \cdot \frac{38{,}4°}{360°}$ $(\approx 108{,}6\ \text{km}^2)$.	1 pont	
$T_{\text{körszelet}} \approx 108{,}6 - 100{,}6 = 8\ (\text{km}^2)$.	1 pont	
Az elpusztult rész területe körülbelül 8 km^2.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

17. a)		
Összesen: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$,	2 pont	
azaz 840 négyjegyű számot lehet készíteni.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

17. b)		
Az első öt számjegy mindegyike lehet az 1, 2, 3, 4, 5 számok közül bármelyik, ez összesen $5^5 (= 3125)$ lehetőség.	2 pont	
Az utolsó két számjegy a 4-gyel való oszthatóság miatt csak a következő öt eset valamelyike lehet: 12, 24, 32, 44, 52.	2 pont	*Ha 4 jó lehetőséget megad (és rosszat nem) vagy az 5 jó lehetőség mellett 1 rossz is szerepel, akkor 1 pont, más hibás válasz esetén nem jár pont.*
Összesen $5^5 \cdot 5$,	1 pont	
azaz 15 625 hétjegyű szám alkotható.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

17. c)		
Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek mindegyike szerepel a hatjegyű számban, közülük az egyik pontosan kétszer.	1 pont	*Ha ez a gondolat a megoldás során derül ki, akkor is jár ez a pont.*
Csak a 3-as számjegy lehet az, amelyik kétszer fordul elő,	1 pont	
mert a számjegyek összegének 3-mal oszthatónak kell lennie,	1 pont	
és $1+2+3+4+5=15$ (ami osztható 3-mal).	1 pont	
A két 3-as számjegy helyét $\binom{6}{2}$-féleképpen választhatjuk meg.	1 pont	*A megfelelő 6-jegyű számok darabszáma az 1; 2; 3; 3; 4; 5 karakterek összes permutációinak száma, tehát* $\frac{6!}{2!}=360$.
A megmaradó 4 helyre 4!-féleképpen helyezhető el a többi számjegy.	1 pont	
A megfelelő hatjegyű számokból összesen $\binom{6}{2}\cdot 4!$,	1 pont	
azaz 360 darab van.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

18 a)

 Ábra készítése, adatok feltüntetése.	1 pont	*Ha ábra nélkül is jó a megoldása, akkor is jár ez a pont. Ha a megadott átmérőkkel mint sugarakkal számol a vizsgázó, akkor ezt a pontot nem kaphatja meg.*
A csonkakúp m cm magas. (A szimmetria miatt) $ED = 2{,}5$ cm.	1 pont	
Az AED derékszögű háromszögből ($AD = 8{,}5$; $AE = m$): $m^2 = 8{,}5^2 - 2{,}5^2$, $m \approx 8{,}1$.	1 pont	
Ennek 86%-a: $0{,}86m \approx 7{,}0$.	1 pont	
Az APQ és az AED derékszögű háromszögek hasonlók (mindkettő derékszögű és egyik hegyesszögük közös);	1 pont	
a hasonlóságuk aránya (megfelelő oldalaik hosszának aránya) 0,86.	1 pont	*A pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a számításokból derül ki.*
Ezért $PQ = 0{,}86 \cdot DE$, vagyis $PQ = 0{,}86 \cdot 2{,}5 = 2{,}15$.	1 pont	*A $PQ \approx 2{,}2$ kerekítés is elfogadható.*
A síkmetszet sugara: $GQ = 3 + 2{,}15 = 5{,}15$.	1 pont	*$GQ \approx 5{,}2$ is elfogadható.*
A tejföl térfogata: $V \approx \frac{7{,}0 \cdot \pi}{3} \cdot \left(5{,}15^2 + 3^2 + 5{,}15 \cdot 3\right)$.	1 pont	
$V \approx 372{,}9$ (cm^3).	1 pont	
Tíz cm^3-re kerekítve a tejföl térfogata 370 cm^3.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha $GQ \approx 5{,}2$-vel számol és emiatt a tejföl térfogatára – helyes kerekítéssel – 380 cm^3-t kap.*
Összesen:	**11 pont**	

18. b) első megoldás		
Komplementer eseménnyel számolunk.	1 pont	*Ezt a pontot akkor is megkapja, ha ez a gondolat csak a számításokból derül ki.*
Sérült doboz kiválasztásának a valószínűsége 0,03, ezért a jó doboz kiválasztásának a valószínűsége 0,97.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy az ellenőr nem talál selejtes terméket $0{,}97^{10}$,	2 pont	
tehát annak a valószínűsége, hogy talál selejtest $1 - 0{,}97^{10}$ ($\approx 0{,}2626$).	1 pont	
A keresett valószínűség két tizedesjegyre kerekítve 0,26.	1 pont	*Ha a valószínűséget százalékban adja meg a vizsgázó (26%, illetve 26,26%), akkor is jár ez a pont.*
Összesen:	**6 pont**	

18. b) második megoldás		
Sérült doboz kiválasztásának a valószínűsége 0,03, ezért a jó doboz kiválasztásának a valószínűsége 0,97.	1 pont	
Legyen $P(k)$ annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott 10 doboz között k darab selejtes van. $P(1)=\binom{10}{1}\cdot 0{,}03\cdot 0{,}97^{9}\approx 0{,}228$; $P(2)=\binom{10}{2}\cdot 0{,}03^{2}\cdot 0{,}97^{8}\approx 0{,}032$; $P(3)=\binom{10}{3}\cdot 0{,}03^{3}\cdot 0{,}97^{7}\approx 0{,}003$; $P(4)=\binom{10}{4}\cdot 0{,}03^{4}\cdot 0{,}97^{6}\approx 0{,}0001$. Az $5\le k\le 10$ esetben mindegyik valószínűség 0,00001-nél kisebb lesz, tehát a két tizedesjegyre kerekített értéket ezek összege nem befolyásolja.	3 pont	*1 pont jár, ha legalább egy esetben jól alkalmazza a binomiális eloszlásra vonatkozó összefüggést (jól helyettesít be). 1 pont jár, ha azt tudja, hogy 10 esetet kell vizsgálnia. Teljes pontszámot (3 pont) akkor kaphat, ha a fent leírt megoldás gondolatmenetét alkalmazva jut jó eredményre, illetve ha mind a 10 esetet helyesen felírja.*
A kérdezett valószínűség tehát körülbelül $0{,}228+0{,}032+0{,}003=0{,}263$,	1 pont	
két tizedesjegyre kerekítve 0,26.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	