Sokszínű matematika 11/91. oldal

1. feladat a) $4^{2x-1}\cdot 2^x = 16^x$

Mivel mindegyik hatvány alapja 2 hatvány, ezért átírjuk a 4-et és a 16-ot:

$$\left(2^2\right)^{2x-1}\cdot 2^x = \left(2^4\right)^x$$

Alkalmazzuk a *hatvány hatványa* azonosságot!

$$2^{2\cdot(2x-1)}\cdot 2^x = 2^{4\cdot x}$$

A bal oldalon az *azonos alapú hatványok szorzása* azonosság miatt a kitevőket összeadjuk:

$$2^{2\cdot(2x-1)+x} = 2^{4\cdot x}$$

Elértük *célunkat*: két kettő hatvány egyenlő.
Ez csak úgy lehet, hogy a kitevők is egyenlők.
Másképp: mivel a 2^x *függvény szigorúan monoton*, azért a *hatványok* egyenlőségéből következik a *kitevők* egyenlősége.

$$2\cdot(2x-1)+x = 4\cdot x$$

Az exponenciális egyenlet helyett egy *elsőfokú egyenletet* kell megoldanunk a ***mérlegelv*** segítségével:

$$2\cdot(2x-1)+x = 4\cdot x$$

$$(4\cdot x-2+x = 4\cdot x)\ -4x$$

$$(-2+x=0)\ +2$$

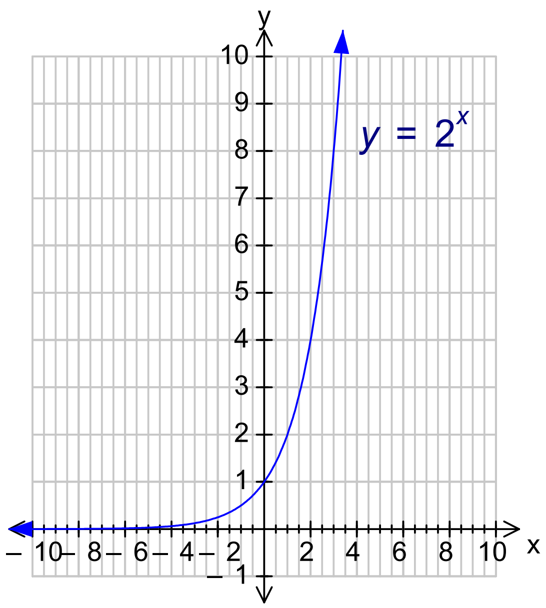
$$x=2$$

A válasz előtt az *ellenőrzés*:

bal oldal: $\left(2^2\right)^{2\cdot 2-1}\cdot 2^2 = 2^6\cdot 2^2 = 2^8$

jobb oldal: $\left(2^4\right)^2 = 2^8$

Válasz: az egyenlet megoldása a 2.



Sokszínű matematika 11/91. oldal

1. feladat b) $9^{x-1}=81\cdot\sqrt{3}$

Mivel mindegyik hatvány alapja 3 hatvány, ezért átírjuk a 9-et és a 81-et, majd a gyök hármat is:

$$\left(3^2\right)^{x-1}=\left(3^4\right)\cdot 3^{\frac{1}{2}}$$

Alkalmazzuk a *hatvány hatványa* azonosságot, majd a jobb oldalon az *azonos alapú hatványok szorzása* azonosság miatt a kitevőket összeadjuk:

$$3^{2(x-1)}=3^4\cdot 3^{\frac{1}{2}}=3^{4,5}$$

Elértük *célunkat*: két három hatvány egyenlő.
Ez csak úgy lehet, hogy a kitevők is egyenlők.
Másképp: mivel a 3^x *függvény szigorúan monoton*, azért a *hatványok* egyenlőségéből következik a *kitevők* egyenlősége.

$$2\cdot(x-1)=4,5$$

Az exponenciális egyenlet helyett egy *elsőfokú egyenletet* kell megoldanunk a ***mérlegelv*** segítségével:

$$2\cdot(x-1)=4,5$$

$$(2\cdot x-2=4,5)+2$$

$$(2\cdot x=6,5):2$$

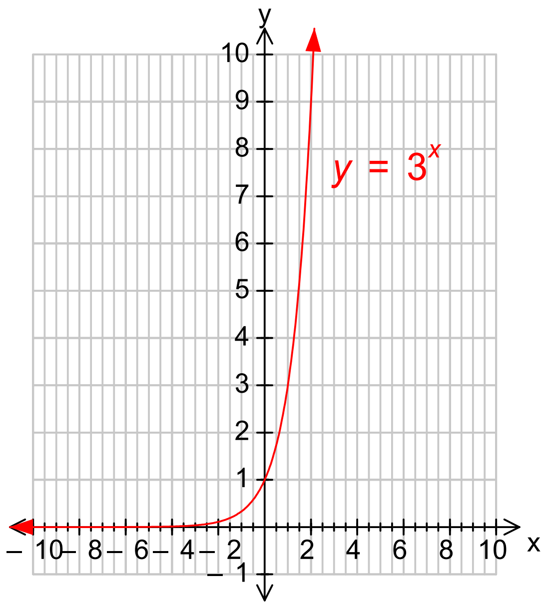
$$x=3,25=\frac{13}{4}$$

A válasz előtt az *ellenőrzés*:

bal oldal: $9^{3,25-1}=9^{2,25}=3^{4,5}$

jobb oldal: $81\cdot\sqrt{3}=3^4\cdot 3^{0,5}=3^{4,5}$

Válasz: az egyenlet megoldása a 3,25.



Sokszínű matematika 11/91. oldal

1. feladat c) $10^{x^2-4x+3}=1$

Mivel az 1 minden pozitív szám 0-adik hatványa, ezért:

$$10^{x^2-4x+3}=10^0$$

Elértük *célunkat*: két tíz hatvány egyenlő.
Ez csak úgy lehet, hogy a kitevők is egyenlők.
Másképp: mivel a 10^x *függvény szigorúan monoton*, azért a *hatványok* egyenlőségéből következik a *kitevők* egyenlősége.

$$x^2-4x+3=0$$

Az exponenciális egyenlet helyett egy *másodfokú egyenletet* kell megoldanunk a ***megoldóképlet*** segítségével:

$$x^2-4\cdot x+3=0$$

$$a=1;\ b=-4;\ c=3$$

$$D=b^2-4\cdot a\cdot c=16-4\cdot 1\cdot 3=4$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2\cdot a}=\frac{4\pm 2}{2}\to x_1=3;\ x_2=1$$

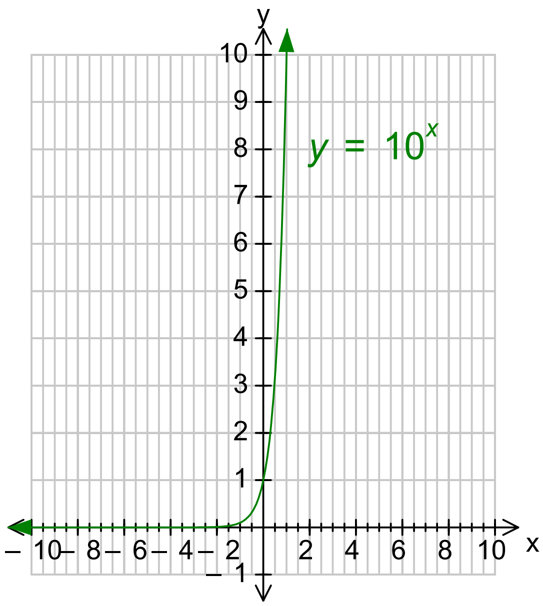
A válasz előtt az *ellenőrzés*:

bal oldal: $10^{3^2-4\cdot 3+3}=10^0=1$

$10^{1^2-4\cdot 1+3}=10^0=1$

jobb oldal: 1

Válasz: az egyenlet megoldásai a 3 ill. az 1.



Sokszínű matematika 11/91. oldal

1. feladat d) $6^{2x^2} \cdot 6^{7x} = 6^{15}$

Alkalmazzuk az azonos alapú hatványok szorzata azonosságot a bal oldalon:

$$6^{2x^2+7x} = 6^{15}$$

Elértük *célunkat*: két hat hatvány egyenlő.
Ez csak úgy lehet, hogy a kitevők is egyenlők.
Másképp: mivel a 6^x *függvény szigorúan monoton*, azért a *hatványok* egyenlőségéből következik a *kitevők* egyenlősége.

$$2x^2 + 7x = 15$$

Az exponenciális egyenlet helyett egy *másodfokú egyenletet* kell megoldanunk a **megoldóképlet** segítségével:

$$2 \cdot x^2 + 7 \cdot x - 15 = 0$$

$$a = 2;\ b = 7;\ c = -15$$

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 49 - 4 \cdot 2 \cdot (-15) = 169$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a} = \frac{-7 \pm 13}{4} \rightarrow x_1 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2};\ x_2 = -$$

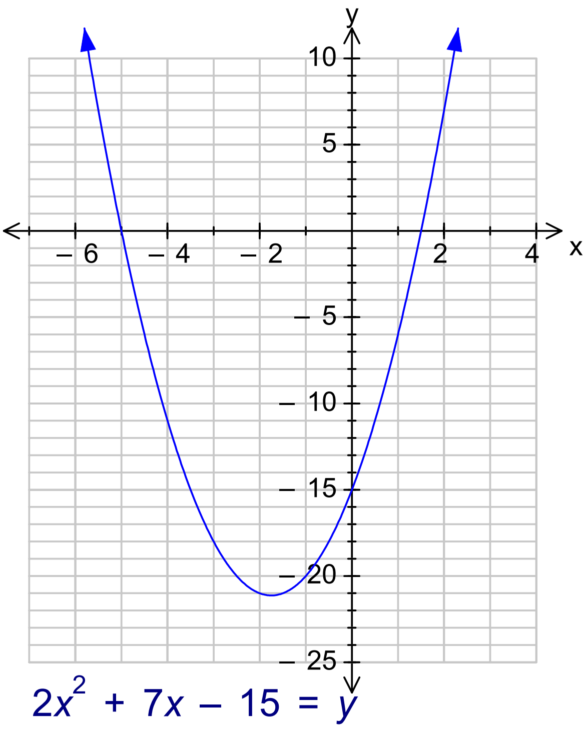
A válasz előtt az *ellenőrzés*:

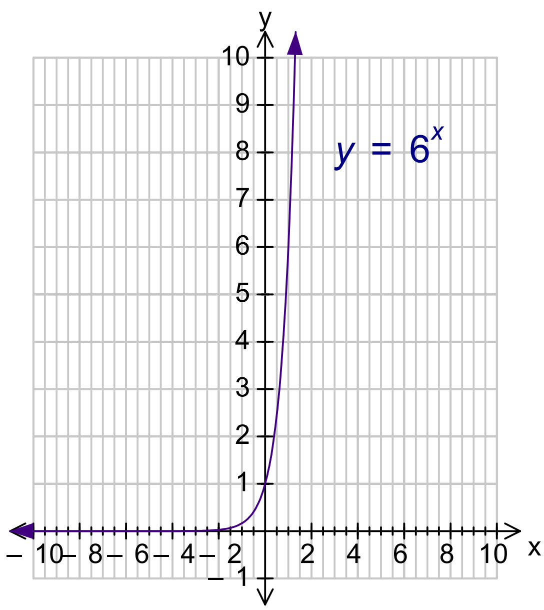
bal oldal: $6^{2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2} \cdot 6^{7 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)} = 6^{\frac{9}{2}+\frac{21}{2}} = 6^{15}$

$6^{2 \cdot (-5)^2} \cdot 6^{7 \cdot (-5)} = 6^{50-35} = 6^{15}$

jobb oldal: 6^{15}

Válasz: az egyenlet megoldásai a $\frac{3}{2}$ ill. a -5.





Sokszínű matematika 11/91. oldal

1. feladat e) $27\cdot 2^x = 8\cdot 3^x$

Írjuk át a 27-et és a 8-at prímszámok hatványaként!

$$3^3\cdot 2^x = 2^3\cdot 3^x$$

$$\left(3^3\cdot 2^x = 2^3\cdot 3^x\right):3^x;:3^3$$

Egyik oldalon sem alkalmazhatunk hatványozás azonosságot, viszont alkalmas osztásokkal és a hányados hatványa azonosság alkalmazásával mindkét oldalon elérhetjük a célunkat:

$$\frac{2^x}{3^x} = \frac{2^3}{3^3}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

Elértük *célunkat*: két kétharmad alapú hatvány egyenlő.
Ez csak úgy lehet, hogy a kitevők is egyenlők.

Másképp: mivel a $\left(\frac{2}{3}\right)^x$ *függvény szigorúan monoton*, azért a *hatványok* egyenlőségéből következik a *kitevők* egyenlősége.

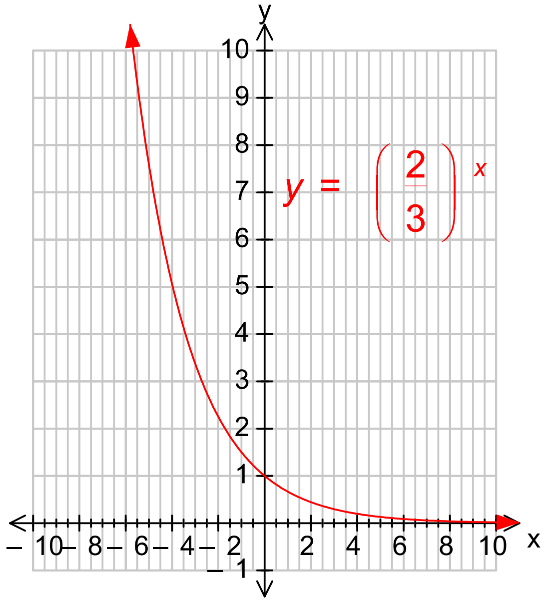
$$x = 3$$

A válasz előtt az *ellenőrzés*:

bal oldal: $27\cdot 2^3 = 27\cdot 8 = 216$

jobb oldal: $8\cdot 3^3 = 8\cdot 27 = 216$

Válasz: az egyenlet megoldása a 3.



Sokszínű matematika 11/91. oldal

1. feladat f) $125 \cdot 3^{x-1} = 3 \cdot 5^{x+1}$

Írjuk át a 125-öt prímszámok hatványaként, majd végezzük el a kijelölt osztásokat!

$$\left(5^3 \cdot 3^{x-1} = 3 \cdot 5^{x+1}\right) : 5^3; : 3$$

$$\frac{3^{x-1}}{3} = \frac{5^{x+1}}{5^3}$$

Alkalmazzuk az azonos alapú hatványok hányadosa azonosságot:

$$3^{(x-1)-1} = 5^{(x+1)-3}$$

$$3^{x-2} = 5^{x-2}$$

Az alapok különböznek, a kitevők hiába egyenlők, erre nincs azonosság, átalakítási lehetőség. Az egyenlő kitevők miatt oszthatunk.

$$\left(3^{x-2} = 5^{x-2}\right) : 5^{x-2}$$

A bal oldalon a hányados hatványa azonosságot alkalmazzuk, míg a jobb oldalon az 1-et felírjuk a 3/5 hatványaként, hogy elérjük célunkat!

$$\frac{3^{x-2}}{5^{x-2}} = \frac{5^{x-2}}{5^{x-2}} = 1$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x-2} = 1 = \left(\frac{3}{5}\right)^0$$

Elértük *célunkat*: két három-ötöd alapú hatvány egyenlő.

Ez csak úgy lehet, hogy a kitevők is egyenlők.

$$(x-2=0)+2$$

$$x = 2$$

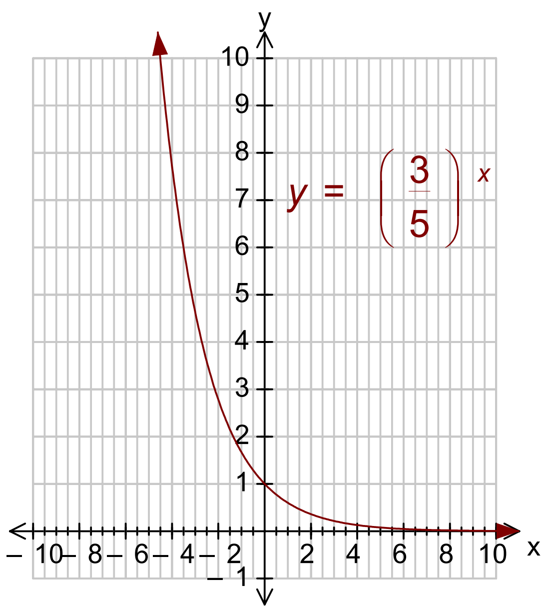
Másképp: mivel a $\left(\frac{3}{5}\right)^x$ *függvény szigorúan monoton*, azért a *hatványok* egyenlőségéből következik a *kitevők* egyenlősége.

A válasz előtt az *ellenőrzés*:

bal oldal: $125 \cdot 3^{2-1} = 125 \cdot 3 = 375$

jobb oldal: $3 \cdot 5^{2+1} = 3 \cdot 5^3 = 3 \cdot 125 = 375$

Válasz: az egyenlet megoldása a 2.



Sokszínű matematika 11/91. oldal

1. feladat g) $2^{x-1}+2^{x+1}=20$

A baloldalon hatványok összege áll. <u>Erre NEM alkalmazható egy azonosság sem!</u> A tagokra külön-külön viszont az azonos alapú hatványok szorzatára való azonosság igen!

$$2^{x-1}+2^{x+1}=20$$

$$2^{x}\cdot 2^{-1}+2^{x}\cdot 2^{1}=20$$

$$2^{x}\cdot\left(2^{-1}+2^{1}\right)=20$$

A baloldalt kiemeléssel szorzattá alakítjuk!
A zárójelen belül elvégezzük az összeadást, majd a 2,5-el osztjuk az egyenlet mindkét oldalát.
Végül a 8-at felírjuk 2 hatvány alakban.

$$2^{x}\cdot\left(\underbrace{\frac{1}{2}+2}_{2,5}\right)=20$$

$$\left(2,5\cdot 2^{x}=20\right):2,5$$

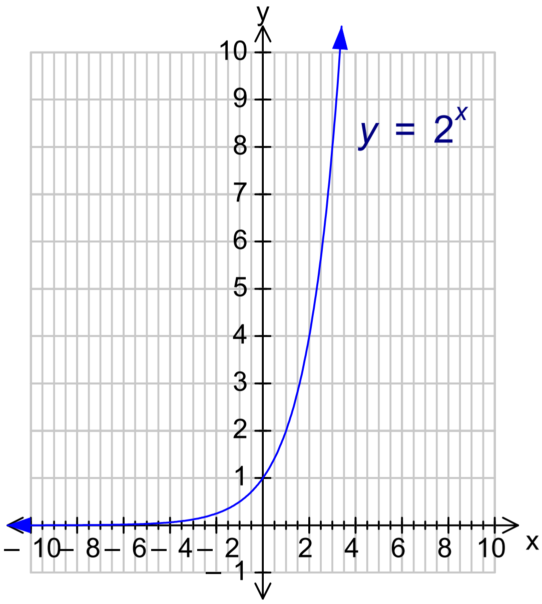
$$2^{x}=\frac{20}{2,5}=8=2^{3}$$

Elértük *célunkat*: két kettő alapú hatvány egyenlő.
Ez csak úgy lehet, hogy a kitevők is egyenlők.
Másképp: mivel a 2^{x} *függvény szigorúan monoton*, azért a *hatványok* egyenlőségéből következik a *kitevők* egyenlősége.

$$x=3$$

A válasz előtt az *ellenőrzés*:
bal oldal: $2^{3-1}+2^{3+1}=2^{2}+2^{4}=4+16=20$
jobb oldal: 20

Válasz: az egyenlet megoldása a 3.



Sokszínű matematika 11/91. oldal

1. feladat h) $3^x + 3^{x+2} + 3^{x-1} = \frac{31}{3}$

A baloldalon hatványok összege áll. Erre NEM alkalmazható egy azonosság sem! A tagokra külön-külön viszont az azonos alapú hatványok szorzatára való azonosság igen!

$$3^x + 3^x \cdot 3^2 + 3^x \cdot 3^{-1} = \frac{31}{3}$$

A baloldalt kiemeléssel szorzattá alakítjuk!
A zárójelen belül elvégezzük az összeadást, majd a 31/3-al osztjuk az egyenlet mindkét oldalát.
Végül az 1-et felírjuk 3 hatvány alakban.

$$3^x \cdot \left(\underbrace{1 + 3^2 + 3^{-1}}_{10+\frac{1}{3}=\frac{31}{3}} \right) = \frac{31}{3}$$

$$\left(\frac{31}{3} \cdot 3^x = \frac{31}{3} \right) : \frac{31}{3}$$

$$3^x = 1 = 3^0$$

Elértük *célunkat*: két három alapú hatvány egyenlő.
Ez csak úgy lehet, hogy a kitevők is egyenlők.
Másképp: mivel a 3^x *függvény szigorúan monoton*, azért a *hatványok* egyenlőségéből következik a *kitevők* egyenlősége.

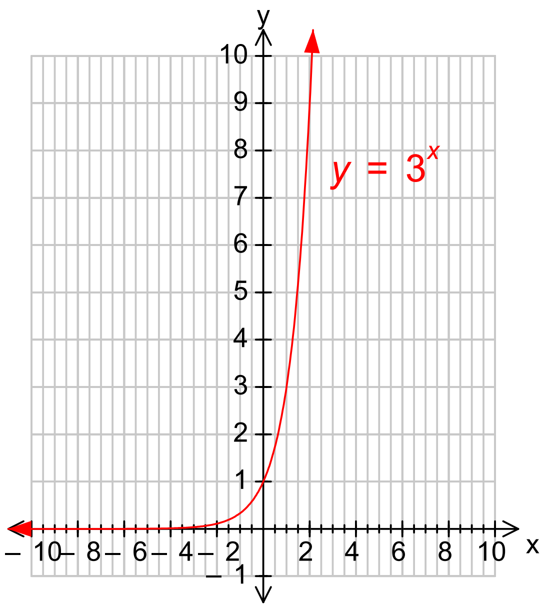
$$x = 0$$

A válasz előtt az *ellenőrzés*:
bal oldal:

$$3^0 + 3^{0+2} + 3^{0-1} = 1 + 3^2 + 3^{-1} = 10 + \frac{1}{3} = \frac{31}{3}$$

jobb oldal: $\frac{31}{3}$

Válasz: az egyenlet megoldása a 0.



Sokszínű matematika 11/91. oldal

1. feladat i) $25^x + 5 = 6 \cdot 5^x$

A baloldalon hatványok összege áll. Erre NEM alkalmazható egy azonosság sem! Írjuk át a 25-öt 5 hatvány alakban! Alkalmazzuk a hatvány hatványa azonosságot az első tagon!

Vegyük észre, hogy egy másodfokú egyenletet látunk, ahol az 5^x hatvány az *ismeretlen*!

$$\left(5^2\right)^x + 5 = 6 \cdot 5^x$$
$$\left(5^x\right)^2 + 5 = 6 \cdot 5^x$$

Nullára redukálás után új ismeretlent vezetünk be. Erre megoldjuk a másodfokú egyenletet.

$$\left(5^x\right)^2 + 5 = 6 \cdot 5^x \quad /\text{redukálás } 0\text{-ra}$$
$$\left(5^x\right)^2 - 6 \cdot 5^x + 5 = 0 \quad /\text{új ismeretlen: } y := 5^x$$
$$y^2 - 6 \cdot y + 5 = 0$$

A másodfokú egyenletet a megoldó-képlet segítségével oldjuk meg.

$$y^2 - 6 \cdot y + 5 = 0$$
$$a = 1 \quad b = -6 \quad c = 5$$
$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16$$
$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a} = \frac{6 \pm 4}{2} \Rightarrow y_1 = 5;\ y_2 = 1$$

Most az *eredeti ismeretlen* értékeit határozzuk meg.

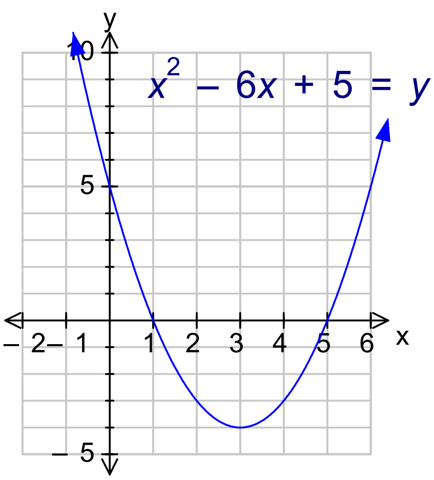
$$y = 5^x$$
$$y_1 = 5 = 5^x \Rightarrow x_1 = 1$$
$$y_2 = 1 = 5^x \Rightarrow x_2 = 0$$

A válasz előtt az *ellenőrzés*:

bal oldal:
$$25^1 + 5 = 30$$
$$25^0 + 5 = 1 + 5 = 6$$

jobb oldal:
$$6 \cdot 5^1 = 30$$
$$6 \cdot 5^0 = 6 \cdot 1 = 6$$

Válasz: az egyenlet megoldásai a 0 és az 1.



Sokszínű matematika 11/91. oldal

1. feladat j) $9^x + 6\cdot 3^x - 27 = 0$

A baloldalon hatványok összege áll. Erre NEM alkalmazható egy azonosság sem! Írjuk át a 9-et 3 hatvány alakban! Alkalmazzuk a hatvány hatványa azonosságot az első tagon!
Vegyük észre, hogy egy másodfokú egyenletet látunk, ahol az 3^x hatvány az *ismeretlen*!

$$\left(3^2\right)^x + 6\cdot 3^x - 27 = 0$$

$$\left(3^x\right)^2 + 6\cdot 3^x - 27 = 0$$

Miután a 3^x csökkenő hatványai szerint rendezett az egyenlet új ismeretlent vezetünk be.
Erre megoldjuk a másodfokú egyenletet a megoldó-képlet segítségével.

$$y := 3^x$$

$$y^2 + 6\cdot y - 27 = 0$$

$$a = 1 \quad b = 6 \quad c = -27$$

$$D = b^2 - 4\cdot a\cdot c = 36 - 4\cdot 1\cdot(-27) = 144$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2\cdot a} = \frac{-6 \pm 12}{2} \Rightarrow y_1 = 3 \quad y_2 = -9$$

Most az *eredeti ismeretlen* értékeit határozzuk meg.
Mivel a 3^x értékei csak pozitív számok lehetnek, ezért a -9 *y* érték nem ad megoldást *x*-re.

$$y = 3^x$$

$$y_1 = 3 = 3^x \Rightarrow x_1 = 1$$

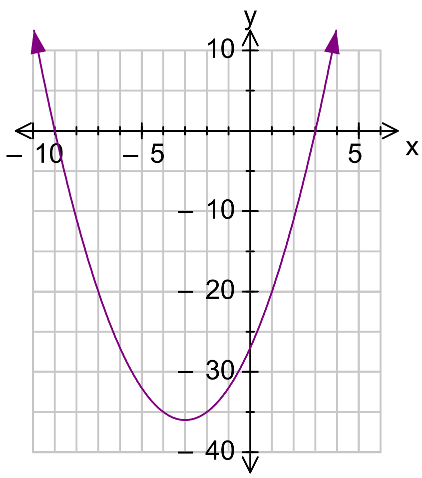
$$y_2 = -9 = 3^x \Rightarrow \nexists x$$

A válasz előtt az *ellenőrzés*:

bal oldal: $9^1 + 6\cdot 3^1 - 27 = 9 + 18 - 27 = 0$

jobb oldal: 0.

Válasz: az egyenlet megoldása az 1.



$x^2 + 6x - 27 = y$