



Sokszínű matematika 11/91. oldal

1. feladat a) $4^{2x-1} \cdot 2^x = 16^x$

Mivel mindegyik hatvány alapja 2 hatvány, ezért átírjuk a 4-et és a 16-ot:

Alkalmazzuk a *hatvány hatványa* azonosságot!

A bal oldalon az *azonos alapú hatványok szorzása* azonosság miatt a kitevőket összeadjuk:

Elértük *célunkat*: két kettő hatvány egyenlő.

Ez csak úgy lehet, hogy a kitevők is egyenlők.

Másképp: mivel a 2^x függvény szigorúan monoton, azért a *hatványok egyenlőségéből* következik a *kitevők egyenlősége*.

$$(2^2)^{2x-1} \cdot 2^x = (2^4)^x$$

$$2^{2(2x-1)} \cdot 2^x = 2^{4x}$$

$$2^{2(2x-1)+x} = 2^{4x}$$

$$2 \cdot (2x - 1) + x = 4 \cdot x$$

Az exponenciális egyenlet helyett egy *elsőfokú egyenletet* kell megoldanunk a *mérlegelv* segítségével:

$$2 \cdot (2x - 1) + x = 4 \cdot x$$

$$(4 \cdot x - 2 + x = 4 \cdot x) -4x$$

$$(-2 + x = 0) +2$$

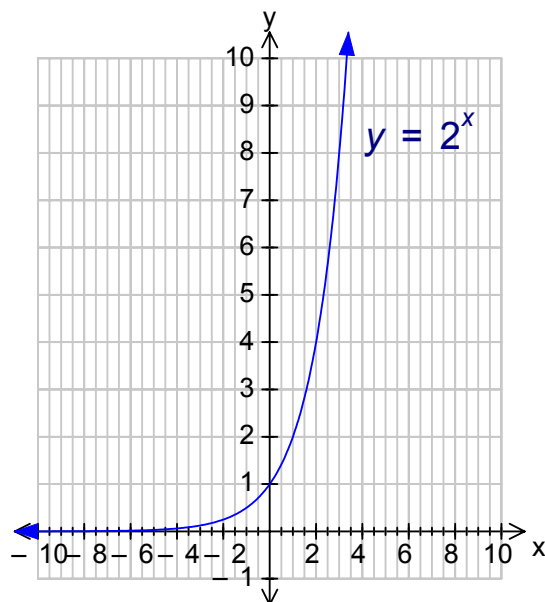
$$x = 2$$

A válasz előtt az *ellenőrzés*:

$$\text{bal oldal: } (2^2)^{2 \cdot 2 - 1} \cdot 2^2 = 2^6 \cdot 2^2 = 2^8$$

$$\text{jobb oldal: } (2^4)^2 = 2^8$$

Válasz: az egyenlet megoldása a 2.





Sokszínű matematika 11/91. oldal

1. feladat b) $9^{x-1} = 81 \cdot \sqrt{3}$

Mivel mindegyik hatvány alapja 3 hatvány, ezért átírjuk a 9-et és a 81-et, majd a gyök hármat is:

Alkalmazzuk a *hatvány hatványa* azonosságot, majd a jobb oldalon az *azonos alapú hatványok szorzása* azonosság miatt a kitevőket összeadjuk:

Elértük *célunkat*: két három hatvány egyenlő.

Ez csak úgy lehet, hogy a kitevők is egyenlők.

Másképp: mivel a 3^x függvény szigorúan monoton, azért a hatványok egyenlőségéből következik a kitevők egyenlősége.

$$(3^2)^{x-1} = (3^4) \cdot 3^{\frac{1}{2}}$$

$$3^{2(x-1)} = 3^4 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{4,5}$$

$$2 \cdot (x - 1) = 4,5$$

Az exponenciális egyenlet helyett egy *elsőfokú egyenletet* kell megoldanunk a *mérlegelv* segítségével:

$$2 \cdot (x - 1) = 4,5$$

$$(2 \cdot x - 2 = 4,5) + 2$$

$$(2 \cdot x = 6,5) : 2$$

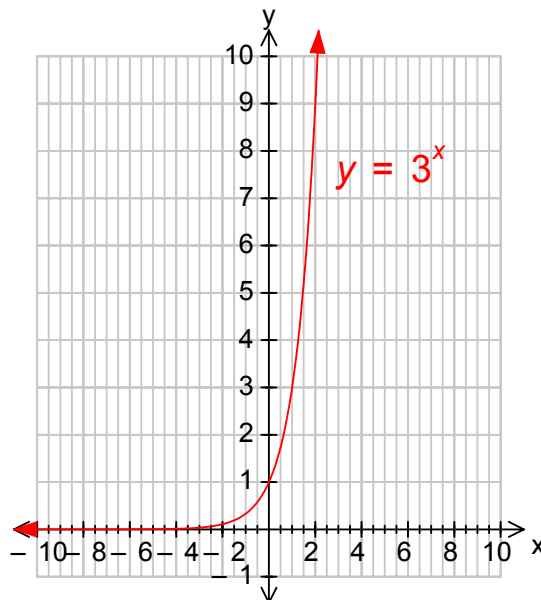
$$x = 3,25 = \frac{13}{4}$$

A válasz előtt az *ellenőrzés*:

bal oldal: $9^{3,25-1} = 9^{2,25} = 3^{4,5}$

jobb oldal: $81 \cdot \sqrt{3} = 3^4 \cdot 3^{0,5} = 3^{4,5}$

Válasz: az egyenlet megoldása a 3,25.





Sokszínű matematika 11/91. oldal

1. feladat c) $10^{x^2-4x+3} = 1$

Mivel az 1 minden pozitív szám 0-adik hatványa, ezért:

Elértük *célunkat*: két tíz hatvány egyenlő.

Ez csak úgy lehet, hogy a kitevők is egyenlők.

Másképp: mivel a 10^x függvény szigorúan monoton, azért a hatványok egyenlőségéből következik a kitevők egyenlősége.

$$10^{x^2-4x+3} = 10^0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Az exponenciális egyenlet helyett egy másodfokú egyenletet kell megoldanunk a *megoldóképlet* segítségével:

$$x^2 - 4 \cdot x + 3 = 0$$

$$a = 1; b = -4; c = 3$$

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a} = \frac{4 \pm 2}{2} \rightarrow x_1 = 3; x_2 = 1$$

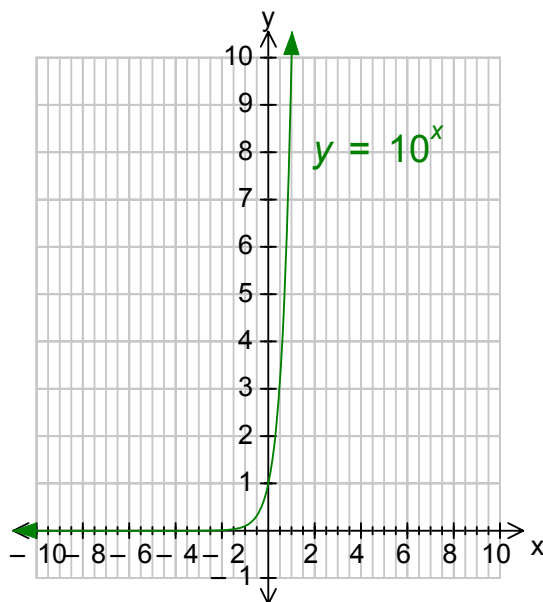
A válasz előtt az ellenőrzés:

bal oldal: $10^{3^2-4 \cdot 3+3} = 10^0 = 1$

jobb oldal: $10^{1^2-4 \cdot 1+3} = 10^0 = 1$

jobb oldal: 1

Válasz: az egyenlet megoldásai a 3 ill. az 1.





Sokszíni matematika 11/91. oldal

1. feladat d) $6^{2x^2} \cdot 6^{7x} = 6^{15}$

Alkalmazzuk az **azonos alapú hatványok szorzata**

azonosságát a bal oldalon:

Elértük **célunkat**: két hatvány egyenlő.

Ez csak úgy lehet, hogy a kitevők is egyenlők.

Másképp: mivel a 6^x függvény szigorúan monoton, azért a hatványok egyenlőségéből következik a kitevők egyenlősége.

$$6^{2x^2+7x} = 6^{15}$$

$$2x^2 + 7x = 15$$

Az exponenciális egyenlet helyett egy *másodfokú egyenletet* kell megoldanunk a **megoldóképlet** segítségével:

$$2 \cdot x^2 + 7 \cdot x - 15 = 0$$

$$a = 2; b = 7; c = -15$$

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 49 - 4 \cdot 2 \cdot (-15) = 169$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a} = \frac{-7 \pm 13}{4} \rightarrow x_1 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}; x_2 = -$$

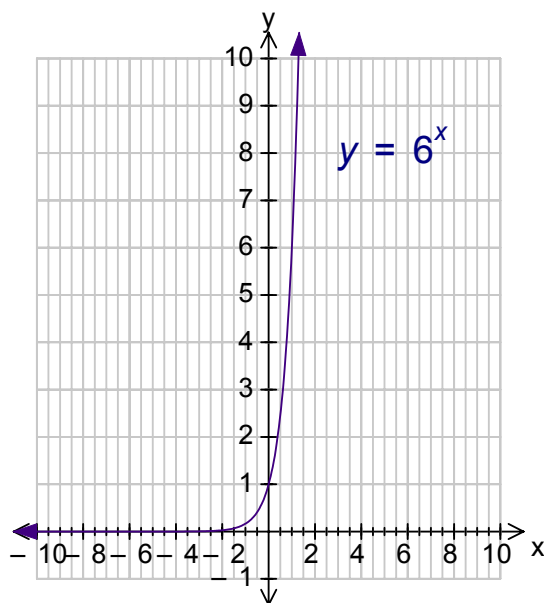
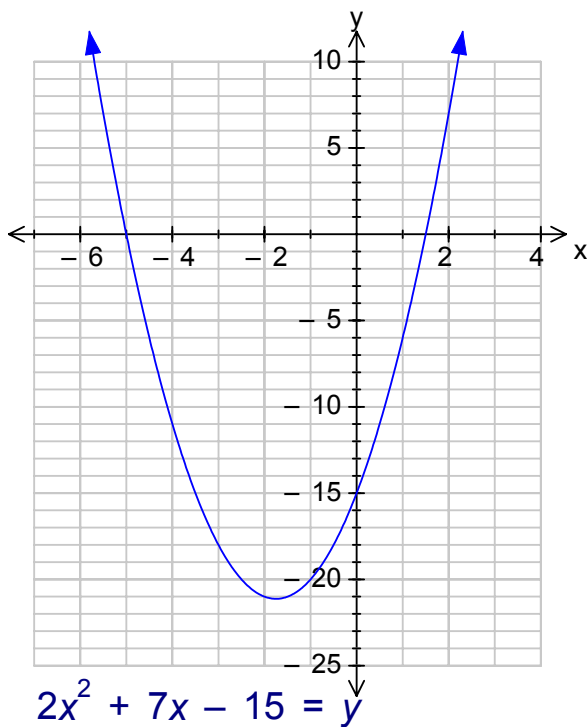
A válasz előtt az **ellenőrzés**:

bal oldal: $6^{2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2} \cdot 6^{7 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)} = 6^{\frac{9}{2} + \frac{21}{2}} = 6^{15}$

$$6^{2 \cdot (-5)^2} \cdot 6^{7 \cdot (-5)} = 6^{50-35} = 6^{15}$$

jobb oldal: 6^{15}

Válasz: az egyenlet megoldásai a $\frac{3}{2}$ ill. a -5 .





Sokszínű matematika 11/91. oldal

1. feladat e) $27 \cdot 2^x = 8 \cdot 3^x$

Írjuk át a 27-et és a 8-at prímszámok hatványaként!

$$3^3 \cdot 2^x = 2^3 \cdot 3^x$$

$$(3^3 \cdot 2^x = 2^3 \cdot 3^x) : 3^x ; : 2^3$$

Egyik oldalon sem alkalmazhatunk hatványozás azonosságot, viszont alkalmas osztásokkal és a **hányados hatványa** azonosság alkalmazásával mindkét oldalon elérhetjük a **célunkat**:

$$\frac{2^x}{3^x} = \frac{2^3}{3^3}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

Elértük **célunkat**: két kétharmad alapú hatvány egyenlő.

Ez csak úgy lehet, hogy a kitevők is egyenlők.

Másképp: mivel a $\left(\frac{2}{3}\right)^x$ függvény szigorúan monoton,

$$x = 3$$

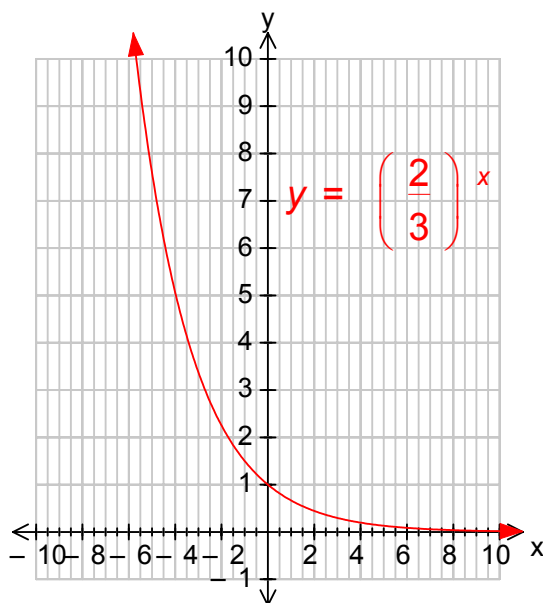
azért a **hatványok** egyenlőségéből következik a **kitevők** egyenlősége.

A válasz előtt az **ellenőrzés**:

bal oldal: $27 \cdot 2^3 = 27 \cdot 8 = 216$

Válasz: az egyenlet megoldása a 3.

jobb oldal: $8 \cdot 3^3 = 8 \cdot 27 = 216$





Sokszínű matematika 11/91. oldal

1. feladat f) $125 \cdot 3^{x-1} = 3 \cdot 5^{x+1}$

Írjuk át a 125-öt prímszámok hatványaként, majd végezzük el a kijelölt osztásokat!

Alkalmazzuk az **azonos alapú hatványok hányadosa** azonosságát:

Az alapok különböznek, a kitevők hiába egyenlők, erre nincs azonosság, átalakítási lehetőség. Az egyenlő kitevők miatt oszthatunk.

A bal oldalon a **hányados hatványa** azonosságot alkalmazzuk, míg a jobb oldalon az 1-et felírjuk a $3/5$ hatványaként, hogy elérjük **célunkat!**

Elértük **célunkat**: két három-ötöd alapú hatvány egyenlő.

Ez csak úgy lehet, hogy a kitevők is egyenlők.

Másképp: mivel a $\left(\frac{3}{5}\right)^x$ függvény szigorúan monoton,

azért a **hatványok egyenlőségéből** következik a **kitevők egyenlősége**.

A válasz előtt az **ellenőrzés**:

bal oldal: $125 \cdot 3^{2-1} = 125 \cdot 3 = 375$

jobb oldal: $3 \cdot 5^{2+1} = 3 \cdot 5^3 = 3 \cdot 125 = 375$

$$(5^3 \cdot 3^{x-1} = 3 \cdot 5^{x+1}) : 5^3 ; : 3$$

$$\frac{3^{x-1}}{3} = \frac{5^{x+1}}{5^3}$$

$$3^{(x-1)-1} = 5^{(x+1)-3}$$

$$3^{x-2} = 5^{x-2}$$

$$(3^{x-2} = 5^{x-2}) : 5^{x-2}$$

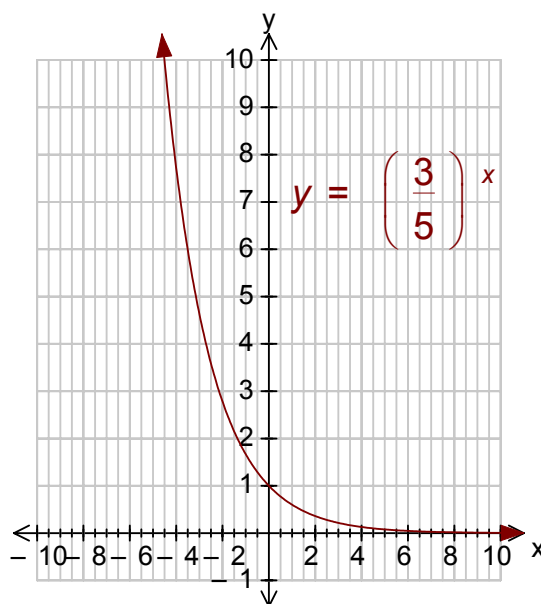
$$\frac{3^{x-2}}{5^{x-2}} = \frac{5^{x-2}}{5^{x-2}} = 1$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x-2} = 1 = \left(\frac{3}{5}\right)^0$$

$$(x - 2 = 0) + 2$$

$$x = 2$$

Válasz: az egyenlet megoldása a 2.





Sokszínű matematika 11/91. oldal

1. feladat g) $2^{x-1} + 2^{x+1} = 20$

A baloldalon hatványok összege áll. Erre NEM alkalmazható egy azonosság sem! A tagokra külön-külön viszont az **azonos alapú hatványok szorzatára** való azonosság igen!

A baloldalt **kiemeléssel szorzattá** alakítjuk!
A zárójelen belül elvégezzük az összeadást, majd a 2,5-el osztjuk az egyenlet mindkét oldalát.
Végül a 8-at felírjuk 2 hatvány alakban.

$$2^{x-1} + 2^{x+1} = 20$$

$$2^x \cdot 2^{-1} + 2^x \cdot 2^1 = 20$$

$$2^x \cdot (2^{-1} + 2^1) = 20$$

$$2^x \cdot \left(\frac{1}{2} + 2 \right) = 20$$

$$\left(2,5 \cdot 2^x = 20 \right) : 2,5$$

$$2^x = \frac{20}{2,5} = 8 = 2^3$$

Elértük **célunkat**: két kettő alapú hatvány egyenlő.
Ez csak úgy lehet, hogy a kitevők is egyenlők.
Másképp: mivel a 2^x függvény szigorúan monoton, azért a hatványok egyenlőségéből következik a kitevők egyenlősége.

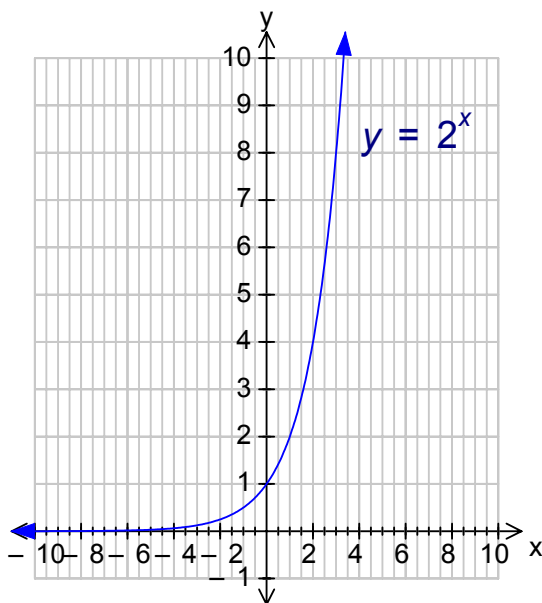
$$x = 3$$

A válasz előtt az **ellenőrzés**:

bal oldal: $2^{3-1} + 2^{3+1} = 2^2 + 2^4 = 4 + 16 = 20$

Válasz: az egyenlet megoldása a 3.

jobb oldal: 20





Sokszínű matematika 11/91. oldal

1. feladat h) $3^x + 3^{x+2} + 3^{x-1} = \frac{31}{3}$

A baloldalon hatványok összege áll. Erre NEM alkalmazható egy azonosság sem! A tagokra külön-külön viszont az **azonos alapú hatványok szorzatára** való azonosság igen!

$$3^x + 3^x \cdot 3^2 + 3^x \cdot 3^{-1} = \frac{31}{3}$$

A baloldalt **kiemeléssel szorzattá** alakítjuk!
A zárójelen belül elvégezzük az összeadást, majd a 31/3-al osztjuk az egyenlet mindkét oldalát.
Végül az 1-et felírjuk 3 hatvány alakban.

$$3^x \cdot \left(\underbrace{1 + 3^2 + 3^{-1}}_{10 + \frac{1}{3} = \frac{31}{3}} \right) = \frac{31}{3}$$

$$\left(\frac{31}{3} \cdot 3^x = \frac{31}{3} \right) : \frac{31}{3}$$

$$3^x = 1 = 3^0$$

Elértük **célunkat**: két három alapú hatvány egyenlő. Ez csak úgy lehet, hogy a kitevők is egyenlők.

Másképp: mivel a 3^x függvény szigorúan monoton, azért a hatványok egyenlőségéből következik a kitevők egyenlősége.

A válasz előtt az **ellenőrzés**:

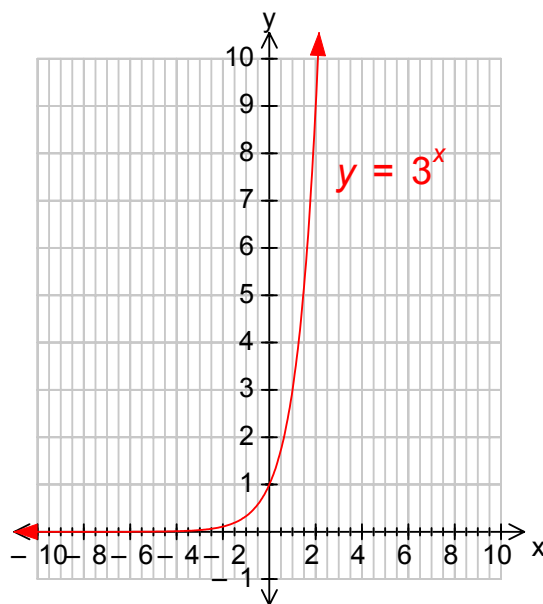
bal oldal:

$$3^0 + 3^{0+2} + 3^{0-1} = 1 + 3^2 + 3^{-1} = 10 + \frac{1}{3} = \frac{31}{3}$$

$$x = 0$$

Válasz: az egyenlet megoldása a 0.

jobb oldal: $\frac{31}{3}$





Sokszínű matematika 11/91. oldal

1. feladat i) $25^x + 5 = 6 \cdot 5^x$

A baloldalon hatványok összege áll. Erre NEM alkalmazható egy azonosság sem! Írjuk át a 25-öt 5 hatvány alakban! Alkalmazzuk a **hatvány hatványa** azonosságot az első tagon!

$$(5^2)^x + 5 = 6 \cdot 5^x$$

Vegyük észre, hogy egy **másodfokú egyenletet** látunk, ahol az 5^x hatvány az ismeretlen!

$$(5^x)^2 + 5 = 6 \cdot 5^x$$

Nullára redukálás után **új ismeretlent vezetünk be.** Erre megoldjuk a másodfokú egyenletet.

$$(5^x)^2 + 5 = 6 \cdot 5^x \quad / \text{redukálás } 0 \text{-ra}$$

$$(5^x)^2 - 6 \cdot 5^x + 5 = 0 \quad / \text{új ismeretlen : } y := 5^x$$

$$y^2 - 6 \cdot y + 5 = 0$$

$$y^2 - 6 \cdot y + 5 = 0$$

$$a = 1 \quad b = -6 \quad c = 5$$

A másodfokú egyenletet a **megoldó-képlet** segítségével oldjuk meg.

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a} = \frac{6 \pm 4}{2} \Rightarrow y_1 = 5; y_2 = 1$$

$$y = 5^x$$

Most az **eredeti ismeretlen** értékeit határozzuk meg.

$$y_1 = 5 = 5^x \Rightarrow x_1 = 1$$

$$y_2 = 1 = 5^x \Rightarrow x_2 = 0$$

A válasz előtt az **ellenőrzés:**

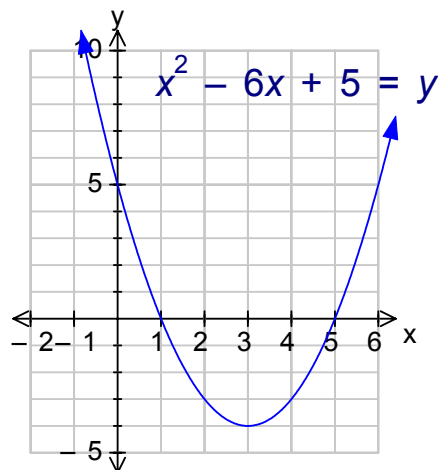
bal oldal: $25^1 + 5 = 30$

$$25^0 + 5 = 1 + 5 = 6$$

jobb oldal: $6 \cdot 5^1 = 30$

$$6 \cdot 5^0 = 6 \cdot 1 = 6$$

Válasz: az egyenlet megoldásai a 0 és az 1.





Sokszínű matematika 11/91. oldal

1. feladat j) $9^x + 6 \cdot 3^x - 27 = 0$

A baloldalon hatványok összege áll. Erre NEM alkalmazható egy azonosság sem! Írjuk át a 9-et 3 hatvány alakban! Alkalmazzuk a **hatvány hatványa** azonosságot az első tagon!
Vegyük észre, hogy egy **másodfokú egyenletet** látunk, ahol az 3^x hatvány az ismeretlen!

$$(3^2)^x + 6 \cdot 3^x - 27 = 0$$

$$(3^x)^2 + 6 \cdot 3^x - 27 = 0$$

$$y := 3^x$$

$$y^2 + 6 \cdot y - 27 = 0$$

$$a = 1 \quad b = 6 \quad c = -27$$

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 36 - 4 \cdot 1 \cdot (-27) = 144$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a} = \frac{-6 \pm 12}{2} \Rightarrow y_1 = 3 \quad y_2 = -9$$

Miután a 3^x csökkenő hatványai szerint rendezett az egyenlet **új ismeretlen vezetünk be**.
Erre megoldjuk a másodfokú egyenletet a **megoldóképlet** segítségével.

Most az **eredeti ismeretlen** értékeit határozzuk meg.
Mivel a 3^x **értékei csak pozitív számok lehetnek**, ezért a -9 y érték nem ad megoldást x-re.

$$y = 3^x$$

$$y_1 = 3 = 3^x \Rightarrow x_1 = 1$$

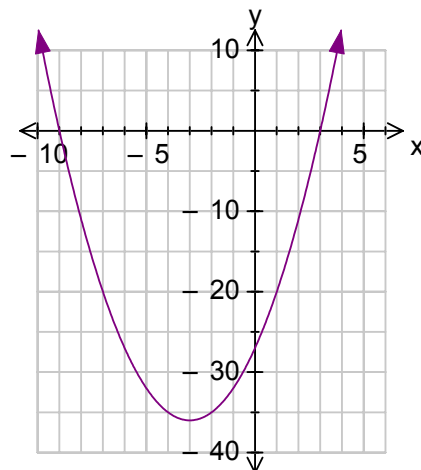
$$y_2 = -9 = 3^x \Rightarrow \cancel{x}$$

A válasz előtt az **ellenőrzés**:

bal oldal: $9^1 + 6 \cdot 3^1 - 27 = 9 + 18 - 27 = 0$

Válasz: az egyenlet megoldása az 1.

jobb oldal: 0.



$$x^2 + 6x - 27 = y$$