Sokszínű matematika 12.

A KITŰZÖTT FELADATOK EREDMÉNYE

Számsorozatok

1. A számsorozat fogalma, példák sorozatokra

1. A pozitív páros számok sorozatának n-edik tagja: $2n$, a sorozat első n tagjának összege: $n(n+1)$.

2. *a)* n^2

   b) $\dfrac{n^2(n^2+1)}{2}$

   c) $(2n-1)(n^2-n+1)$

3. A bizonyításokat például teljes indukcióval lehet elvégezni.

4. *a)* Érdemes a_n-t átalakítani így:
$$a_n = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot n\cdot(n+1)\cdot \ldots \cdot(2n-1)\cdot 2n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}$$

   b) Az a_n-t itt így érdemes felírni:
$$a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right).$$

5. A sejtés általánosan így írható fel:
$$n^2+n^2+1+\ldots+n^2+n = n^2+n+1+n^2+n+2+\ldots+n^2+2n.$$
   Az összegzés után a bizonyítás közvetlenül adódik.

2. Példák rekurzív sorozatokra

1. *a)*, *b)*, *c)* teljes indukcióval könnyű igazolni.

2. –

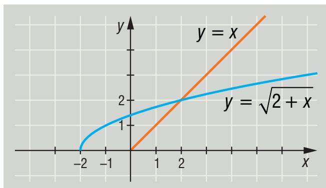
3. Az egyes „ferde” vonalak mentén adódó összegek a következők:

   1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

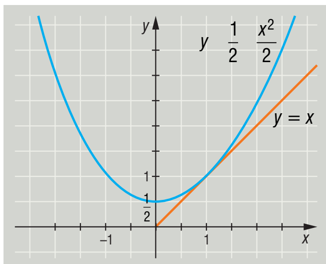
   Az általános sejtés tehát az lehet, hogy az n-edik sorban álló számok öszege f_n.
   A sejtés teljes indukcióval igazolható.

4. A sorozat tulajdonságait teljes indukcióval igazolhatjuk. A szemléltetést az 1. ábrán lehet elvégezni.

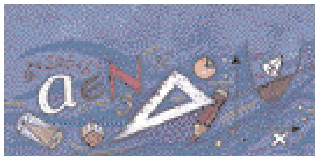
5. A sorozat tulajdonságait teljes indukcióval igazolhatjuk, a sorozat tagjainak szemléltetését a 2. ábrán végezhetjük el.



1. ábra



2. ábra



3. Számtani sorozatok

1. $3+6+9+...+999=\frac{2\cdot 3+332\cdot 3}{2}\cdot 333=166833.$

2. A feltételből a1 = 2 és d = 4 adódik. Így azt a legkisebb pozitív egész n-et keressük, amelyre

$$\frac{2\cdot 2+(n-1)\cdot 4}{2}\cdot n\geq 1000.$$

Az eredmény: $n = 23$.

3. Elég igazolni, hogy az $a^2 + c^2 = 2b^2$ és $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}=\frac{2}{a+c}$ egyenlőségek ekvivalensek.

4. *a)* a1 =–7, d = 3.

b) Két megoldás van:

- $a_1 = 1,\ d = 3,$
- $a_1 = -\frac{122}{3},\ d = \frac{59}{3}.$

c) A kitűzött feladat hibás. A helyes feladat:

$a_3^2 + a_7^2 = 122,$

$a_1 + a_7 = 4.$

Ennek két megoldása van:

- $a_1 =-7,\ d = 3,$
- $a_1 = \frac{67}{5},\ d = -\frac{19}{5}.$

5. Nem. Indirekt bizonyítást alkalmazva arra az ellentmondásra jutunk, hogy $\sqrt{3}$ racionális szám.

6. –

7. 5050.

8. 450,5 másodperc alatt esik le a test 4410 m magasról.

9. $2\cdot(1+2+...+12)=2\cdot\frac{1+12}{2}\cdot 12=156.$

10. Az egyenlőtlenséget kielégítő egész koordinátájú pontok száma 221.

4. Mértani sorozatok

1. $a_1 = 6,\ q = 2.$

2. –

3. $q = 2$

4. 1023.

5. *a)* $a_1 = 3, \quad q = 2$

b) A feladatban hiba van, a helyes feladat:

$a_7 - a_4 = -216,$

$a_5 - a_4 = -72.$

Az egyetlen megoldás: $a_1 = -3$, $q = -2$ (a $q = 1$ eset nem ad jó megoldást).

c) Két megoldás van:

- $a_1 = -5, \quad q = 2,$
- $a_1 = -5, \quad q = -2.$

6. –

7. A helyesen kitöltött táblázat:

27	54	108	216
9	18	36	72
3	6	12	24
1	2	4	8

8. Két megoldás van:

- 2, 8, 32;
- 14, 14, 14

(A második megoldás esetében a számtani sorozat differenciája 0, a mértani sorozat hányadosa 1.)

9. A számtani sorozat első tagja 3, különbsége 15.

5. Kamatszámítás, törlesztőrészletek kiszámítása

1. Jelölje p az $1+\frac{1}{100}=\frac{101}{100}$ számot (ez az egyhavi kamat kiszámításához szükséges), akkor a havi törlesztő részlet:

$$5000 \cdot \frac{p^{24}}{p^{24}-1} \approx 23537 \text{ Ft.}$$

2. Feltesszük, hogy havonta egyenlő részletekben törlesztjük a kölcsönt, ekkor a szükséges havi összeg a $q=1+\frac{1}{200}=\frac{201}{200}$ jelölés felhasználásával:

$$50000 \cdot \frac{q^{240}}{q^{240}-1} \approx 71643 \text{ Ft.}$$

Tehát a kölcsönt felvehetjük.

Térgeometria

1. Térelemek

1. 15 rész

2. *a)* 5 vagy 8 rész. *b)* 9, 10 vagy 12 rész.

3. *a)* $\sqrt{2}a$ *b)* $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ *c)* $\frac{\sqrt{2}}{2}a$

4. $\frac{\sqrt{2}}{2}a$

5. 90º; 120º

6. 35,26º; 90º

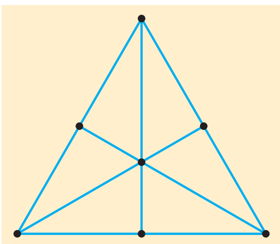
7. $\sqrt{3}a$; $\sqrt{5}a$; 39,23º; 18,43º

***9.** Igaz

2. A sík és a tér felosztása

1. $\frac{n^2-3n+2}{2}$ véges; $2n$ végtelen tartomány

2.



3. 35

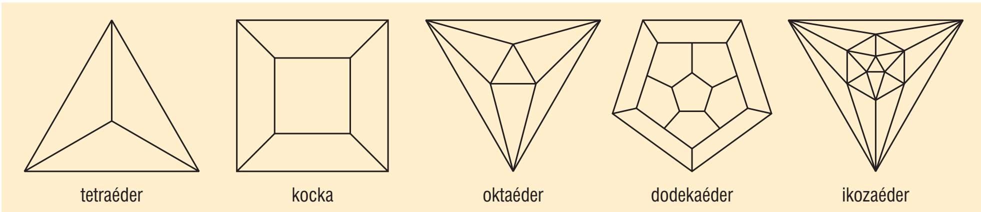
4. $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$

5. $\binom{\binom{n}{2}}{2}=\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{8}$

6. 550

***7.** $\binom{n}{3}+3\cdot\binom{n}{4}$

3. Testek osztályozása, szabályos testek

1. Igen. Pl. ilyen egy térbeli kereszt.
2. Legkevesebb 6, legfeljebb 20.
3. 

4. $\frac{a}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}a$; $\frac{\sqrt{2}}{2}a$
5. $10\sqrt{6}$ cm
6. 8,16 cm; 16,32 cm

*7. $3\sqrt{2}a$

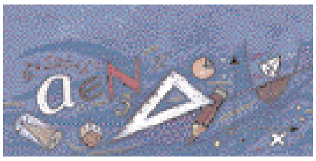
*8. $\frac{\sqrt{3}}{6}a$

4. A terület fogalma, a sokszögek területe

1. $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$
2. 14 cm; 25,38°; 154,62°
3. 7,48 cm; 14,7 cm; 46,68°
4. 7-szerese.
5. $\frac{1}{7}$ része.
6. A súlyvonal a megfelelő egyenes.
7. 172,05 cm^2.
9. $\frac{8}{3}$ területegység.

*10. Igen. Az oldalai lehetnek: 3 és 6, vagy 4 és 4.

*11. *b)* $n = 3$, 4 vagy 6 esetén.



5. A kör és részeinek területe

1. 3; 9

2. $\sqrt{2}$

3. Igen.

4. 6,28 km-rel

5. *a)* 2,09 cm^2 *b)* 3 cm^2 *c)* 1,91 cm^2

6. 0,56 m^2

7. *a)* 5,5 cm^2 *b)* 15,28 cm^2 *c)* 15,71 cm^2 *d)* 11,25 cm^2

8. *a)* $\frac{1}{2}$ *b)* $\frac{1}{2}$

10. Egyenlők.

11. 45,32 cm^2

12. 6,77 cm^2

***13.** 262,88 cm^2

6. A térfogat fogalma, a hasáb és henger térfogata

1. 8 féle. $A_{max} = 146$ (1; 1; 36). $A_{min} = 66$ (3; 3; 4).

2. Élei: $6\sqrt{2}; 8\sqrt{2}; 10\sqrt{2}$; $V = 960\sqrt{2}$; $A = 752$; 45º; 64,9º

3. Élei: 4 cm; 6 cm; 8 cm. $A = 208$ cm^2

4. Élei: 10 cm; 15 cm; 20 cm. $V = 3000$ cm^3

5. *a)* $A = 686{,}6$ cm^2; $V = 866$ cm^3 *b)* $A = 1344{,}1$ cm^2; $V = 3441$ cm^3
c) $A = 1719{,}62$ cm^2; $V = 5196{,}2$ cm^3 *d)* $A = 3538{,}84$ cm^2; $V = 2628{,}32$ cm^3

6. *a)* $V = 785{,}4$ cm^3; $A = 471{,}24$ cm^2 *b)* $V = 10000$ cm^3; $A = 2628{,}32$ cm^2
c) $V = 17904{,}94$ cm^3; $A = 5080{,}99$ cm^2

7. 21,46%

8. $V_1 = 13244{,}76$ cm^3; $A_1 = 3358{,}7$ cm^2 $V_2 = 2548{,}9$ cm^3; $A_2 = 1119{,}57$ cm^2

9. $V_1 = 628{,}32$ cm^3; $A_1 = 408{,}41$ cm^2 $V_2 = 1005{,}31$ cm^3; $A_2 = 653{,}45$ cm^2

10. $V_1 = 288{,}5$ cm^3; $V_2 = 711{,}5$ cm^3 $A_1 = 330{,}9$ cm^2; $A_2 = 500{,}1$ cm^2

***11.** $A = 112$ cm^2; $V = 64$ cm^3

***12.** 3 féle.

7. A gúla és a kúp térfogata

1. *a)* 276,39 cm^3; 333,78 cm^2 *b)* 623,61 cm^3; 487,3 cm^2
c) 1038,09 cm^3; 656,17 cm^2 *d)* 1500 cm^3; 840,77 cm^2

2. *a)* 157,08 cm^3; 201,22 cm^2 *b)* 301,59 cm^3; 301,59 cm^2
c) 301,59 cm^3; 301,59 cm^2

3. 58,93 cm^3

4. 678,41 cm^2

5. 748,55 cm^2

6. 65,35 cm^3

7. 323,61 cm^2; $333{,}\dot{3}$ cm^3

8. $166{,}\dot{6}$ cm^3; 173,21 cm^2

9. 30,16 cm^3; 52,78 cm^2

***11.** $A = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a^2$; $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{18}$

***12.** $a = 3r$ esetén.

8. A csonka gúla és a csonka kúp

1. *a)* 16,69 cm *b)* 1148,58 cm^3; 720,2 cm^2
c) 82,76°

2. *a)* 254,29 cm^3; 275,96 cm^2 *b)* 282,92 cm^3; 288,5 cm^2

3. *a)* 3517,75 cm^3; 3119,38 cm^2 *b)* 4345,92 dm^3; 1518,58 dm^2
c) 107,93 dm^3; 157,58 dm^2

4. 97,49 cm^3; 119,38 cm^2

5. $V_1 = 33{,}\dot{3}$ cm^3; $V_2 = 233{,}\dot{3}$ cm^3 $A_1 = 72{,}17$ cm^2; $A_2 = 266{,}51$ cm^2

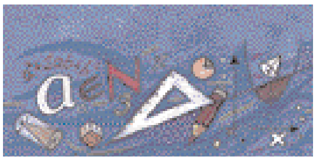
6. $A = 360$ cm^2; $\alpha = 53{,}13°$

7. $\dfrac{7}{24}\pi$ dm^3; $\dfrac{7}{4}\pi$ dm^2

8. *a)* 18,93 cm; 6,31 cm *b)* 21,85 cm; 11833,45 cm^3

9. 573,87 dm^3

10. 390,23 dm^3



9. A gömb térfogata és felszíne

1. *a)* 5 575 280 cm^3; 152 053 cm^2 *b)* 33 510 cm^3; 5027 cm^2

2. 2974 m^3

3. 104 cm^2

4. $\dfrac{3\pi \cdot r^2}{4}$; $\dfrac{3}{16}$ rész

5. $\dfrac{\sqrt{15}}{5}r$

7. 27,14 N

8. 1,6 dm^3; 6,62 dm^2

***9.** $V = \dfrac{\pi}{3}h^2(3r - h)$

***10.** $\dfrac{4\pi}{81}R^3$

***11.** 268 083 cm^3; 20 106 cm^2

10. Egymásba írt testek

1. 1440 cm^3

2. 36,74 cm^3

3. *a)* 10 cm; $2\sqrt{34}$ cm; $2\sqrt{41}$ cm *b)* 160 cm^3; 55,46 cm^2

4. 216 cm^3

5. 0

6. 30,23%

7. $\rho = 2{,}07$ cm; $A = 189{,}61$ cm^2; igaz

8. 18 724,57 cm^3; 4681,14 cm^2

***9.** 39,23%

10. $\dfrac{A_1}{A_2} = 4$; $\dfrac{V_1}{V_2} = 8$

11. 3,41 cm

12. $\sqrt[3]{\dfrac{5}{9}} \cdot m$ (m a kúp magassága)

Algebra és számelmélet — összefoglalás

1. Számok és műveletek

1. 3.

2. Igen, a négyzete is irracionális.

3. Pl.: 2,323323332...

4. 2 km.

5. 96%-át.

6. 17%-os a haszon.

7. ≈ 77%, ≈ 29%.

8. 30 tanuló.

2. Számelmélet, oszthatóság

1. $2^{18} \cdot 5^{11} \cdot 7^{10}$.

2. A számjegyek összege 3, nem lehet prím.

3. Nincs. p és $p + 11$ közül az egyik páros, $p = 2$-re nem igaz.

4. Igen, $2004 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 23$, minden prímtényező kisebb 25-nél.

5. *a)* Pl.: $1988 = 11111000100_2$
b) Pl.: $1988 = 13112_6$

6. 7-es, 8-as, 9-es.

7. 1805.

***8.** $n = 5$ és $n = 13$.

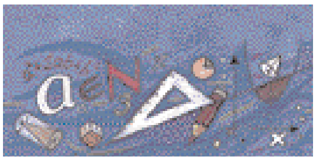
3. Hatvány, gyök, logaritmus

1. 3^{25}.

2. 15 nullára végződik.

3. *a)* 18 éves, 70 kg-os tanuló esetén 27 030 m.
b) 1 892 160 kg.

4. *a)* $2^5 = 32$ *b)* $2^{-4} \cdot 3^{-5}$ *c)* $2^{-1} = \frac{1}{2}$



5. *a)* $9-4\sqrt{5}=\left(\sqrt{5}-2\right)^2$ *b)* $16-6\sqrt{7}=\left(3-\sqrt{7}\right)^2$

6. *a)* Az első a nagyobb. *b)* Az első a nagyobb.

7. *a)* $\frac{1}{\sqrt{10}}$; $a>3$ *b)* 6; $b\geq 0$; $b\neq 1$; $b\neq 16$

***8.** A kifejezés $=4n$.

9. *a)* 4 *b)* 16 *c)* 6

10. *a)* $\left(\frac{81}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{2}{9}<\left(\frac{5}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{5}<\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}=\frac{25}{9}<27^{\frac{1}{3}}=3<\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=9<9^{\frac{3}{2}}=27$

b) $7^{\log_{\frac{1}{7}}5}=\frac{1}{5}<\left(\frac{1}{7}\right)^{\log_7 3}=\frac{1}{3}<7^{\log_7 5-1}=\frac{5}{7}<7^{\log_{13}1}=1<7^{1-\log_{49}25}=\frac{7}{5}<49^{\log_7 2}=4$

c) $\log_3\frac{1}{27}=-3=\log_2 0{,}125<\log_{27}\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}<\log_{25}5=\frac{1}{2}<\log_{\sqrt{2}}8=6$

11. *a)* $x=10$ *b)* $x=\frac{5^2}{2^3}=\frac{25}{8}=3{,}125$ *c)* $x=1$

4. Műveletek racionális kifejezésekkel

1. *a)* $2a(4a-3)$ *b)* $b^2(5b+1)(5b-1)$ *c)* $7(2c+3)^2$

2. Pl. $d^2\,|\,(d-3)+(d-2)^2+(d-1)^3$

3. *a)* 1000 *b)* 2

4. *a)* $\frac{1-3x}{2(x^2-9)}$ *b)* $\frac{-2}{b^2-1}$ *c)* $\frac{-8}{3(x+2)}$

5. Egyenletek, egyenlőtlenségek

1. 7,5 liter 40%-os és 2,5 liter 80%-os.

2. 513.

3. 90 km.

4. 450.

5. 180 km.

6. Legkésőbb 4 órakor.

7. *a)* $n=8;\ 9;\ 11;\ 15$ *b)* $n=0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6$ *c)* $7<n<23$

8. 21 m széles, 33 m hosszú.

9. I. 20 órát, óránként 20 db. II. 16 óra; óránként 25 db.

10. 30 €-ért vette.

***11.** $p=\frac{1}{4}$; $p=4$; $p=\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$

***12.** $p=-20$

13. *b)* $x_1=-16{,}5$; $x_2=1{,}5$ *c)* $x=\frac{1}{2}$

14. *a)* $x=\frac{7}{3}$ *b)* $x=\frac{3}{2}$ *c)* $x_1=2$; $x_2=0$

***15.** $n=4$

16. *a)* $x<\frac{3}{2}$ vagy $x>4$ *b)* $-5<x<-2$ vagy $-1<x$

17. *a)* $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$; $k\in\mathbb{Z}$ *b)* $x=\frac{2\pi}{9}+\frac{4}{3}k\pi$; $\frac{8\pi}{15}+\frac{4}{5}l\pi$; $k,l\in\mathbb{Z}$

c) $x=\frac{\pi}{2}+l\pi$; $l\in\mathbb{Z}$ *d)* $x=2k\pi$; $x=\frac{\pi}{2}+2l\pi$; $k,l\in\mathbb{Z}$

18. *a)* $2k\pi+\frac{2\pi}{3}\le x\le\frac{7\pi}{3}+2k\pi$; *b)* $2l\pi+\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{5\pi}{3}+2l\pi$; $l\in\mathbb{Z}$

6. Egyenletrendszerek

1. *a)* Kb. 65 Ft 1 liter üdítő ára.
b) 41 Ft-nak adódik 1 liter ára.
Az ár nem arányos az üdítő mennyiségével.

2. 8 piros; 42 kék.

3. 9 polc; 112 könyv.

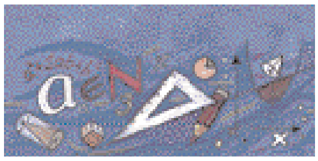
4. *a)* 77-szerese.
b) 98,7%-kal kisebb.

5. *a)* $x=-\frac{3}{5}$; $y=\frac{4}{5}$ *b)* $x_1=-3$; $y_1=-1$; $x_2=\frac{3}{2}$; $y_2=\frac{1}{2}$

c) $x_1=10$; $y_1=11$; $x_2=-10$; $y_1=-11$

6. *a)* $x_1=-1$; $y_1=19$; $y_2=4x_2$; $x_2\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *b)* $x=-\frac{1}{4}$; $y=\frac{7}{4}$

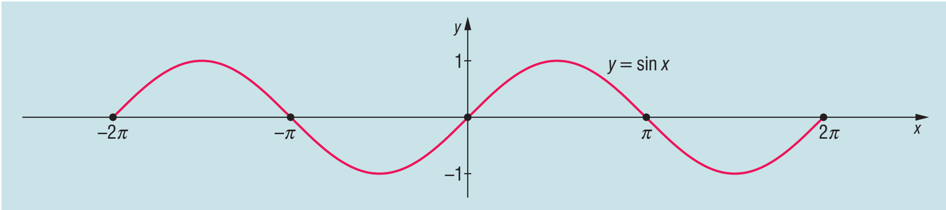
c) $x_1=2$; $y_1=5$; $x_2=2$; $y_2=-5$; $x_3=-2$; $y_3=5$; $x_4=-2$; $y_4=-5$;
$x_5=5$; $y_5=2$; $x_6=5$; $y_6=-2$; $x_7=-5$; $y_7=2$; $x_8=-5$; $y_8=-2$



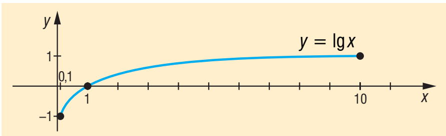
Függvények — összefoglalás

1. A függvény fogalma, grafikonja, egyszerű tulajdonságai

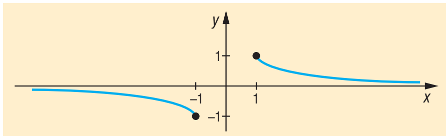
1. *a)*



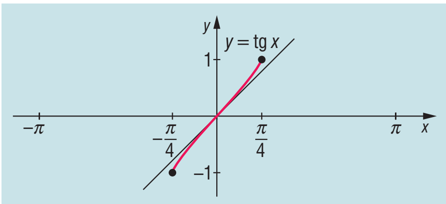
b)



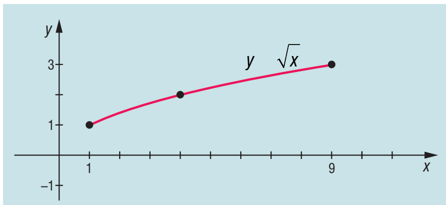
c)



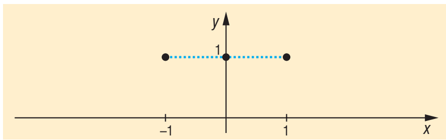
d)



e)



f) A függvény görbéje nem rajzolható meg pontosan, két szakasz mentén mindenütt sűrűn elhelyezkedő pontokból áll.



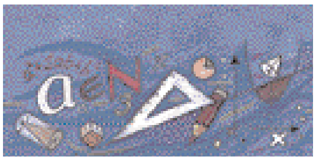
2. *a)* injektív;
b) egyik sem;
c) egyik sem;
d) szürjektív;
e) bijektív;
f) injektív.

2. Műveletek függvényekkel

1. *a)* $f \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^4$;
b) $f \circ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2^{x^2}$;
c) $g \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 4^x$;
d) $g \circ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2^{2^x}$.

2. $f \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$; $f \circ f \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$;

$f \circ f \circ \ldots \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$, az f n-szer szerepel.



3. *a)* $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{2}x - 3$;

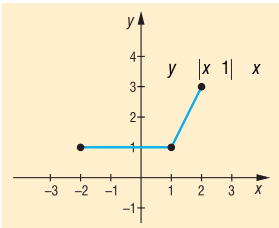
b) $g^{-1}\colon \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{-1\},\ x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$;

c) $h^{-1}\colon [0;\ 1] \to [0;\ 1],\ x \mapsto \sqrt{1-x^2}$;

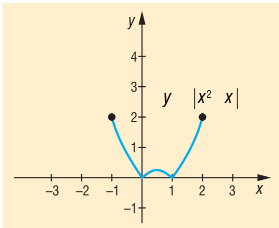
d) $k^{-1}\colon [0;\ 1] \to [-1;\ 0],\ x \mapsto -\sqrt{1-x^2}$;

3. Függvénytulajdonságok

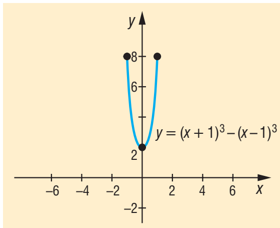
1. *a)*



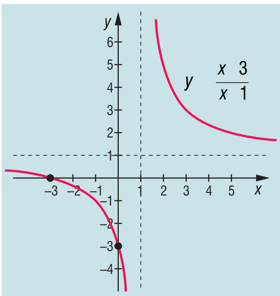
b)



c)

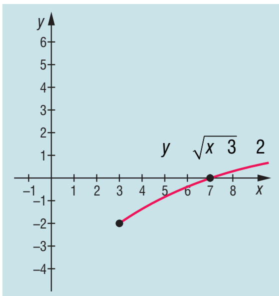


2. *a)*



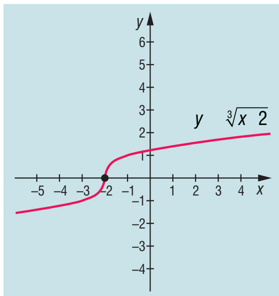
Zérushely: $x = -3$.

b)



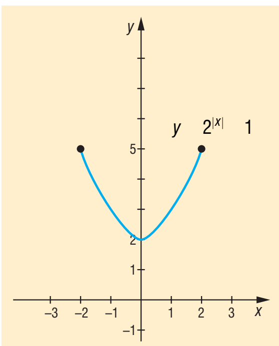
Zérushely: $x = 7$.

c)



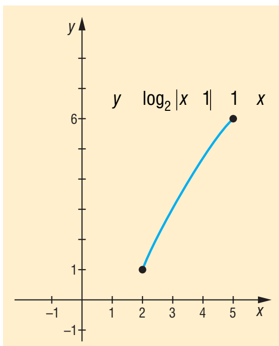
Zérushely: $x = -2$.

3. *a)*



Minimumhely $x = 0$, minimum értéke: 2; maximumhelyek: $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, maximum értéke: 5.

b)

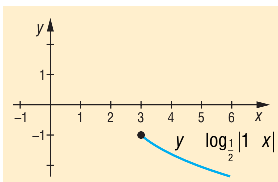


Minimumhely $x = 2$, minimum érték: 1; maximumhely: $x = 5$, maximum érték: 6.

c) A kitűzött feladatban hiba van. A helyes függvény:

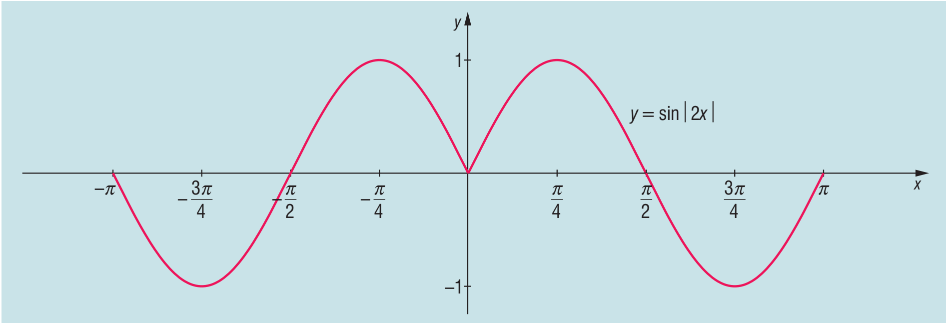
$x \mapsto \log_{\frac{1}{2}} |1-x|$,

$x \in [3;\ +\infty[$



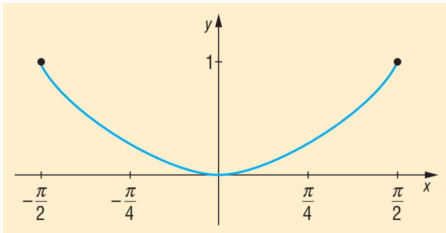
A függvénynek minimuma nincs (alulról nem korlátos), maximumhelye $x = 3$, a maximum érték: -1.

d)



Minimumhelyek: $x_1 = -\frac{3\pi}{4}$ és $x_2 = \frac{3\pi}{4}$, a minimum értéke: –1, maximumhelyek: $x_3 = -\frac{\pi}{4}$ és $x_4 = \frac{\pi}{4}$, a maximum értéke: 1, az $x = 0$ helyen helyi minimuma van a függvénynek, a minimum értéke 0.

e) Minimumhely $x = 0$, a minimum értéke: 0, maximumhelyek $x_1 = -\frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, a maximum értéke 1.



4. A függvény zérushelye: $x = 0$, minimumhelye $x = -1$, a minimum értéke: –1, maximumhelye $x = 1$, a maximum értéke: 1.

5. *a)* Az egyetlen valós gyök: $x = 2$.
b) Az egyetlen valós gyök: $x = 4$.
c) A két valós gyök: $x_1 = -2$ és $x_2 = 2$.

6. *a)* A kitűzött feladatban hiba van. A helyes feladat:
$$\log_{x-2} x \le \log_{x-2} 4, \quad x > 2,\ x \ne 3.$$
A megoldás: $3 < x \le 4$.
b) A megoldás: $-2 < x < 1$.
c) A megoldások a következő intervallumok: $-\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

7. *a)* Egy valós gyöke van: $x = \frac{1}{2}$.
b) Két valós gyöke van: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.
c) A két valós gyök: $x_1 = 3$ és $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}$.

8. Nem periodikus, indirekt úton lehet bizonyítani.

Geometria — összefoglalás

1. Alapvető fogalmak

1. *a)* hamis; *b)* igaz

2. *a)* $AB \leq 4$ cm; *b)* igaz

3. A szögek nagysága: 42º, 57º, 72º, 87º, 102º.

4. A hajó az északi iránnyal +105º-ot bezáró, közelítőleg délnyugati irányban halad.

5. Jelölje a park hosszabbik oldalának hosszát a, a rövidebbikét b. Ha $\frac{a}{b} \leq 2$, akkor a közrefogott alakzat négyzet, ha $\frac{a}{b} > 2$, akkor az ösvények és a park határa egy hatszöget fog közre.

6. Legfeljebb 4 pontot kaphatunk így. Nincs mindig megfelelő pont.

7. A metszéspontok száma 40.

8. *a)* 8 térrész; *b)* 15 térrész; *c)* 16 térrész; *d)* 29 térrész.

2. Geometriai transzformációk

2. Két megfelelő négyzet van, csúcsaik rendre (16; 0), 0; 16), (–16; 0), (0; –16), illetve (8; 8), (–8; 8), (–8; -8), (8; –8).

4. *a)* A közös rész egy $\frac{4}{3}$ cm oldalú szabályos háromszög. $K = 4$ cm, $T = \frac{4\sqrt{3}}{9}$ cm$^2 \approx$ $\approx 0{,}77$ cm^2.
b) Az egyesítés egy konkáv hétszög. $K = 20$ cm, $T = \frac{68\sqrt{3}}{9}$ cm$^2 \approx 13{,}087$ cm^2.

7. *a)* $A'(-4; 10)$, $B'(2; -6)$, $C'(16; 4)$
b) $A'(-10; 12)$, $B'(-4; -4)$, $C'(10; 6)$

8. A nagyítás 80-szoros, a kép és a vászon távolsága 3,95 m.

3. Vektorok. Szögfüggvények

1. $h \approx 34{,}29$ m.

2. $d \approx 8{,}5$ m.

3. $\alpha \approx 25{,}15º$.

4. *a)* $\sin\alpha = 0{,}6$; $\mathrm{tg}\alpha = \frac{3}{4}$; $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$.

b) $\cos\alpha = 0{,}8$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3}{4}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{4}{3}$.

c) $\sin\alpha \approx 0{,}9029$; $\cos\alpha \approx 0{,}4299$; $\operatorname{ctg}\alpha \approx 0{,}4762$.

d) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{5}+2 \approx 4{,}2361$; $\sin\alpha \approx 0{,}9029$; $\cos\alpha \approx 0{,}4299$.

5. Az osztópontok helyvektorai rendre a B csúcstól a C csúcs felé haladva:

$$\frac{5\vec{b}+\vec{c}}{6},\ \frac{2\vec{b}+\vec{c}}{3},\ \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2},\ \frac{\vec{b}+2\vec{c}}{3},\ \frac{\vec{b}+5\vec{c}}{6}.$$

6. $\vec{f}_{AB} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$, $\vec{f}_{BC} = \dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$, $\vec{f}_{CA} = \dfrac{\vec{c}+\vec{a}}{2}$, $\vec{s}_{ABC} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$.

7. *a)* $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$ *b)* $\dfrac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$, $\dfrac{\vec{b}+\vec{d}}{2}$ *c)* $\dfrac{\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}+\frac{\vec{b}+\vec{d}}{2}}{2} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$

Az átlók felezőpontjait összekötő szakasz felezőpontja azonos a középvonalak metszéspontjával.

9. $y = -6$

4. Nevezetes síkidomok tulajdonságai

1. *a)* $\alpha = 40°$; $b \approx 7{,}51$ cm; $c \approx 7{,}05$ cm.

b) $a \approx 4{,}97$ cm; $\alpha \approx 41{,}31°$; $\gamma \approx 43{,}69°$.

c) $c \approx 8{,}88$ cm; $\alpha \approx 61{,}19°$; $\beta \approx 73{,}81°$.

d) $\alpha \approx 59{,}36°$; $\beta \approx 81{,}05°$; $\gamma \approx 39{,}59°$.

3. A befogók: $a \approx 18{,}26$ cm; $b \approx 8{,}16$ cm. A hegyesszögek: $\alpha \approx 65{,}92°$; $\beta \approx 24{,}08°$; $T = \dfrac{68\sqrt{3}}{9}\ \text{cm}^2 \approx 13{,}087\ \text{cm}^2$.

4. *a)* $\alpha \approx 75{,}54°$; $T \approx 17557{,}83\ \text{m}^2$.

b) A maximális területű játéktér oldalai 119,46 m és 73,49 m, területe $T \approx 8779{,}12\ \text{m}^2$.

5. *a)* $\alpha = 50°$; $\beta = 60°$; $\gamma = 70°$.

b) $a \approx 3{,}06$ cm; $b \approx 3{,}46$ cm; $c \approx 3{,}76$ cm; $T \approx 4{,}99\ \text{cm}^2$.

c) $T_a \approx 1{,}52\ \text{cm}^2$; $T_b \approx 2{,}46\ \text{cm}^2$; $T_c \approx 3{,}6\ \text{cm}^2$.

6. A belső szögfelezők által meghatározott négyszög szögei valamelyik körüljárási irányban: 87,5°; 115°; 92,5°; 65°. Ha egy konvex négyszög belső szögfelezői közrefognak egy négyszöget, akkor az mindig húrnégyszög.

7. *a)* Az oldalfelező pontok által meghatározott négyszög téglalap, így az eredeti négyszög átlói merőlegesek egymásra.

b) Az oldalfelező pontok által meghatározott négyszög rombusz, így az eredeti négyszög átlói egyenlő hosszúak.

8. *a)* $n = 9$;
b) n (a sokszög oldalszáma) lehetséges értékei: 14, 15, 16, 17, 18.

9. A sokszög oldalainak száma: $n = 2k + 3$.

10. A legkisebb szög 117º-os, a legnagyobb 171º-os.

5. Koordinátageometria

1. *a)* $A'(4;\, 10),\ B'(8; -4),\ C'(-6;\, 2)$

b) $S\left(2;\ \dfrac{8}{3}\right)$

c) $\left(x - \dfrac{97}{43}\right)^2 + \left(y - \dfrac{83}{43}\right)^2 = \dfrac{126034}{1849}$

d) $K_{ABC} = 2\left(\sqrt{53} + \sqrt{58} + \sqrt{41}\right) \approx 42{,}6$

e) $T_{ABC} = 86$

2. Az érintő egyenlete: $-3x + 4y = -43$.

3. A csúcsok koordinátái (0; 0), (0; –3), (4; 0), a háromszög területe 6 egység.

4. A $H_1(-3; -5)$ harmadoló pontra illeszkedő érintők egyenlete $x = -3$ és $8x - 15y = 51$, a $H_2(-4; -7)$ harmadoló pontra illeszkedő érintők egyenlete pedig

$$y = \left(4 + \frac{6\sqrt{14}}{7}\right)x + 9 + \frac{24\sqrt{14}}{7} \text{ És } y = \left(4 - \frac{6\sqrt{14}}{7}\right)x + 9 - \frac{24\sqrt{14}}{7}.$$

5. A súlypontok halmaza az $y = 2x + \dfrac{1}{3}$ egyenletű egyenes kivéve a $\left(\dfrac{23}{19};\ \dfrac{46}{19}\right)$ pontot, ugyanis ekkor nem jön létre háromszög.

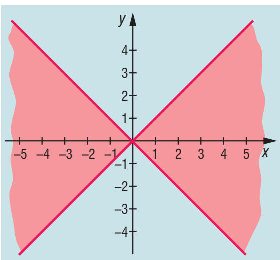
6. *a)* $a_1 = -3;\ a_2 = 1$ *b)* $a = -\dfrac{1}{2}$

7. $T = 29$

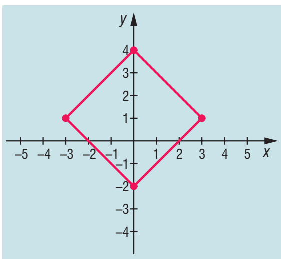
8. A két érintő hajlásszöge $\approx 141{,}06$.

9. $a = 2\sqrt{3};\ T = 3\sqrt{3}$.

10. *a)*



b)



c)