Egy mértani sorozat első három tagjának összege 8-ad része a következő három tag összegének. Mennyi a sorozat hányadosa? (6 pont)

I.megoldás:

Az első három tag összege *kisebb* a következő három tag összegénél $\Rightarrow$ az egyenlőséghez a kisebb oldalt kell megszorozni 8-al!

$$a_1 + a_2 + a_3 < a_4 + a_5 + a_6$$
$$8 \cdot (a_1 + a_2 + a_3) = a_4 + a_5 + a_6 \quad ②$$

Átírjuk a *mértani sorozat* elemeit az első elem és a hányados segítségével $\Rightarrow$ ①

$$8 \cdot (a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2) = a_1 \cdot q^3 + a_1 \cdot q^4 + a_1 \cdot q^5$$

Kiemeléssel alakítsuk szorzattá mindkét oldalt: ①

$$8 \cdot a_1 \cdot (1 + q^1 + q^2) = a_1 \cdot q^3 \cdot (1 + q^1 + q^2)$$

Az egyenletet oszthatjuk $a_1 \neq 0$-val: ①

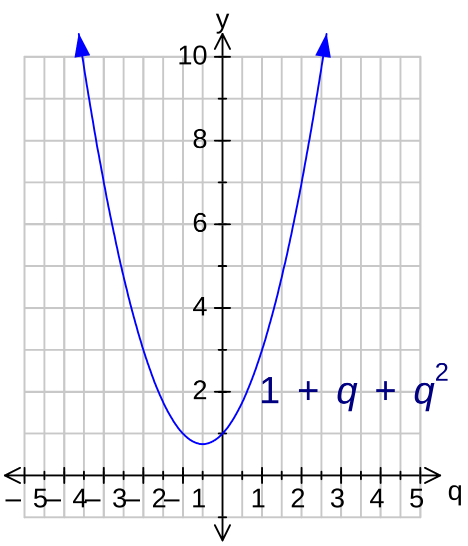
$$8 \cdot (1 + q^1 + q^2) = q^3 \cdot (1 + q^1 + q^2)$$

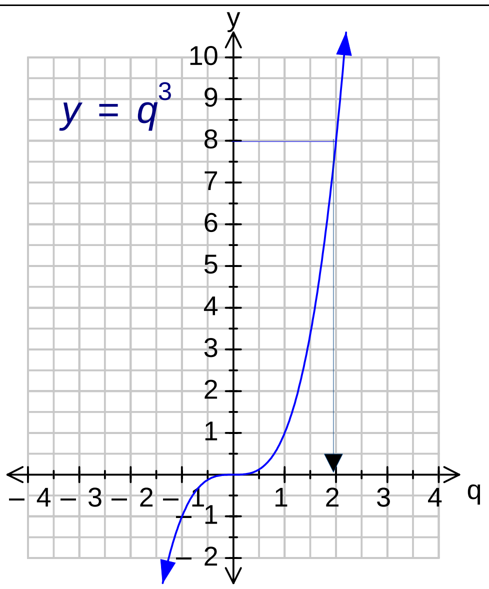
Mivel $1 + q + q^2$ sem nulla (lásd a lenti ábrát), a kifejezéssel is osztjuk az egyenletet, és kapjuk a megoldást: ①

$$8 = q^3$$
$$2 = q$$

A válasz előtt *ellenőrzés.*

Válasz: a feladat megoldása a 2.





II. megoldás:

Használjuk az *első n elem összegét*: $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$; $S_6 - S_3 = a_4 + a_5 + a_6$.

Felírjuk az összefüggést: $8 \cdot S_3 = S_6 - S_3 \Rightarrow 9 \cdot S_3 = S_6$.

Az első 3 ill. 6 elem összegére vonatkozó képletet használva: $9 \cdot a_1 \cdot \frac{q^3 - 1}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{q^6 - 1}{q - 1} \Rightarrow 9 = \frac{q^6 - 1}{q^3 - 1}$.

Használjuk fel az $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$ azonosságot: $9 = \frac{q^6 - 1}{q^3 - 1} = \frac{(q^3)^2 - 1^2}{q^3 - 1} = q^3 + 1$.

Itt találkozunk az első megoldás végével.

Egy színházi nézőtéren 30 sor van. Minden sorban kettővel többen férnek el, mint az előzőben. Hány ember fér el a nézőtéren, ha a 15. sorban 50 férőhely van? (7 pont)

Az egymás utáni sorokban kettővel többen ülnek $\Rightarrow$ az ülőhelyek száma számtani sorozatot alkot, és d=2.

A 15-ik elemet ki lehet fejezni az első elem és a különbség (d) segítségével:

$$n=30$$
$$d=2$$
$$a_{15}=50=a_1+14\cdot 2 \Rightarrow 22=a_1 \quad ②①$$
$$S_n=?$$
$$S_n=\frac{2\cdot a_1+(n-1)\cdot d}{2}\cdot n$$

A teljes nézőtéren 30 sor van, ezért az első 30 sorban lévő ülőhelyek számát az összegképlettel számítjuk ki:

$$S_{30}=\frac{2\cdot 22+(30-1)\cdot 2}{2}\cdot 30 \quad ②$$
$$S_{30}=\frac{44+58}{2}\cdot 30=51\cdot 30=1530$$

A válasz előtt *ellenőrzés* ①.

Válasz: a nézőtéren 1530 ember fér el. ①

Egy országban ma a lakosság 15 millió. 100 évvel ezelőtt 10 millió volt. Hány százalékos az évi átlagos népszaporulat? (6 pont)

A kamatos kamat-számítás képletét kell használni a következő feltételekkel: a *kezdeti érték* 10 millió, a 100 év utánra *felszaporodott érték* 15 millió, az évi átlagos népszaporulatnak a *kamat* felel meg.

$$k_0=10\,\text{millió}$$
$$k_{100}=15\,\text{millió} \quad ①$$
$$n=100$$
$$p=?$$

A feladat *szabványos*: egy *egyenletből kell kifejezni a p értékét* – logaritmus segítségével.

$$k_n=k_0\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^n \Rightarrow 15\text{millió}=10\text{millió}\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^{100} \quad ②$$

Már a második sorban lehetne használni a számológépet, de az *állandó kerekítések miatt csak növekszik a hiba*, kevésbé láthatjuk át az egyenletet.

$$1{,}5=\left(1+\frac{p}{100}\right)^{100} \Rightarrow lg1{,}5=lg\left(1+\frac{p}{100}\right)^{100}$$
$$lg\,1{,}5=100\cdot lg\left(1+\frac{p}{100}\right) \Rightarrow \frac{lg\,1{,}5}{100}=lg\left(1+\frac{p}{100}\right)$$

Érdemes a fentiek miatt csak az utolsó egyenletben számolni és csak egy kerekítést végezni.

$$10^{\frac{lg\,1{,}5}{100}}=10^{lg\left(1+\frac{p}{100}\right)} \Rightarrow 10^{\frac{lg\,1{,}5}{100}}=1+\frac{p}{100} \quad ②$$
$$10^{\frac{lg\,1{,}5}{100}}-1=\frac{p}{100} \Rightarrow 100\cdot\left(10^{\frac{lg\,1{,}5}{100}}-1\right)=p$$

Elmélet: logaritmikus egyenlet, hatvány logaritmusa azonosság, a logaritmus definíciója, mérlegelv.

Válasz: az évi átlagos népszaporulat 0,4063 %. ①

Egy mértani sorozat első három tagjának összege 26. Ha az első taghoz 1-et, a másodikhoz 6-ot, a harmadikhoz 3-at adunk, akkor egy számtani sorozat szomszédos tagjait kapjuk. Melyik ez a mértani sorozat? (14 pont)

„Egy mértani sorozat első három tagjának összege 26." Fordítsuk le a mondatot a matematika nyelvére!

$$a_1+a_2+a_3=26 \Rightarrow a_1+a_1\cdot q+a_1\cdot q^2=26$$ ②

$$\text{kiemelés}:\ a_1\cdot\left(1+q+q^2\right)=26 \quad (1)$$

„Ha az első taghoz 1-et, a másodikhoz 6-ot, a harmadikhoz 3-at adunk, akkor egy számtani sorozat szomszédos tagjait kapjuk."

A számtani sorozat második tagja az első és a harmadik tag számtani közepe.

$$b_1=a_1+1,\ b_2=a_2+6,\ b_3=a_3+3$$

$$\textit{számtani} \Rightarrow b_2=\frac{b_1+b_3}{2}$$

$$a_2+6=\frac{(a_1+1)+(a_3+3)}{2}$$ ②

$$2\cdot(a_1\cdot q+6)=a_1+1+a_1\cdot q^2+3$$

$$2\cdot a_1\cdot q+12=a_1+a_1\cdot q^2+4$$

Rendezzük a számtani sorozatos egyenletet!

$$8=a_1-2\cdot a_1\cdot q+a_1\cdot q^2$$ ②

$$8=a_1\left(1-2\cdot q+q^2\right) \quad (2)$$

Oldjuk meg a két egyenletből álló egyenletrendszert!

Módszer: a két egyenletet elosztjuk egymással az egyik ismeretlen (a_1) kiküszöbölése érdekében.

$$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \frac{8}{26}=\frac{a_1\cdot\left(1-2\cdot q+q^2\right)}{a_1\cdot\left(1+q+q^2\right)}$$

$$8+8\cdot q+8\cdot q^2=26-52\cdot q+26\cdot q^2$$ ②

$$0=18\cdot q^2-60\cdot q+18$$

$$0=3\cdot q^2-10\cdot q+3$$

Oldjuk meg a másodfokú egyenletet a megoldóképlet segítségével!

$$a=3 \quad b=-10 \quad c=3$$

$$D=b^2-4\cdot a\cdot c=100-4\cdot 3\cdot 3=64$$ ②

$$q_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2\cdot a}=\frac{10\pm 8}{6}\Rightarrow q_1=3 \quad q_2=\frac{1}{3}$$

Határozzuk meg a hányadosokhoz tartozó első elemeket!

$$q_1=3 \quad a_1=\frac{26}{1+3+9}=\frac{26}{13}=2$$

$$q_2=\frac{1}{3} \quad a_1=\frac{26}{\frac{1}{3}+1+\frac{1}{9}}=\frac{26}{\frac{13}{9}}=18$$ ②

Írjuk fel a *két* sorozat elemeit! Válasz: ②

$$\text{Első}:\quad a_1=2,\ q=3 \Rightarrow 2,6,18 \rightarrow 3,12,21 \quad d=9$$

$$\text{Második}: a_1=18, q=\frac{1}{3} \Rightarrow 18,6,2 \rightarrow 19,12,5 \quad d=-7$$